

## GB003: 2次元における電導

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

GB002 のケースでは金属オブジェクト全体が等電位の状態に置かれていました。しかしオブジェクトの異なる部分の間に電位がかけられた場合には電流が流れることとなります。普通の金属の場合には電流密度 (electrical current density) ベクトル  $\mathbf{J}$  と電場ベクトル  $\mathbf{E}$ 、ポテンシャル  $U$  の間には次の関係が成立します。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla U \quad (1)$$

ここに  $\sigma$  は電導率 (electric conductivity) を表すパラメータです。一方、連続の式から

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

が導かれます。ここに  $\rho$  は電荷密度を表します。定常状態ではこの第 2 項が 0 となるため、(1) と (2) を結合することにより

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

というラプラス型の偏微分方程式が導かれます。ただし  $\sigma$  は空間的に変化する可能性があるため括弧の外に出すことはできません。しかしこのような場合でも FlexPDE での扱いは容易です。なお、FlexPDE に対し方程式を定義する際、従属変数  $U$  を明示的に含んだ (3) の形の数式を入力する必要はありません。div( $\mathbf{J}$ ) = 0 と記述するだけで (1) により  $U$  に関する 2 階の偏微分方程式が自動的に誘導されます。この  $U$  に関する解から  $\mathbf{E}$  や  $\mathbf{J}$  が算出されることとなります。

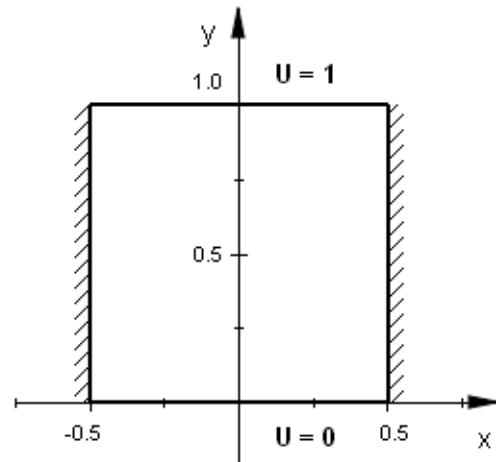
## 1 Case1 - 矩形プレート中の電導

最初に最も簡単な例として右のような銅製の矩形プレートについて考えることにします。この上辺に 1.0V の電位を掛け、下辺は 0V に維持、一方、左右の境界は絶縁状態に置かれているものとします。今、下辺の位置を  $y = 0$  におき、矩形の  $y$  方向の長さを  $L_y$  とすると  $U$  の厳密解は

$$U_{ex} = \frac{y}{L_y} \cdot 1.0$$

という単純な数式で表されることになるので、有限要素法で算出される  $U$  の値との対比も行ってみます。

なお、ここでは 2 次元の問題として扱いますが、対象のオブジェクトに  $z$  軸方向の厚みがあっても構いません。 $U(x, y, z)$  が  $z$  に依存しないと仮定できるなら、結局 2 次元の問題に帰着されるからです。



### 1.1 Problem descriptor [ econduction01a.pde ]

まずタイトルを設定します。

#### TITLE

```
'Conduction in a Rectangular Plate' { econduction01a.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。デフォルトは 0.002 なのですが、ここでは問題が単純なので精度を  $10^{-5}$  とします。

#### SELECT

```
Errlim = 1e-5
```

従属変数を定義します。

#### VARIABLES

```
U { Electric potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を定義します。これらは境界の定義、及び境界条件の設定に際して使用されます。ここでは銅の電導率として  $5.99e7$  という値を使用します。

**DEFINITIONS**

```
Lx = 0.5  Ly = 1.0
cond = 5.99e7      { Conductivity of Cu }
Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  J = cond*E    Jm = magnitude(J)
                                           { Electrical current density }
U_ex = y/Ly*1.0   { Exact solution for 1.0V }
```

方程式を定義します。従属変数  $U$  の数式表現になっていませんが、DEFINITIONS セクションの情報に基づき、 $U$  に関する 2 階の PDE が自動的に導出されます。

**EQUATIONS**

```
div(J)=0          { 2nd order PDE in U }
```

次に境界の形状と境界条件を設定します。上辺、下辺に対しては Value 文を、左右の絶縁境界に対しては Natural 文を使用して境界条件を定義します。

**BOUNDARIES**

```
Region 1
Start (-Lx, 0)
Value(U) = 0    Line to (Lx, 0)
Natural(U) = 0  Line to (Lx, Ly)  { Insulated, Ex = Jx = 0 }
Value(U) = 1.0 Line to (-Lx, Ly)
Natural(U) = 0  Line to Close    { Insulated }
```

最後に出力すべき情報を指定します。

**PLOTS**

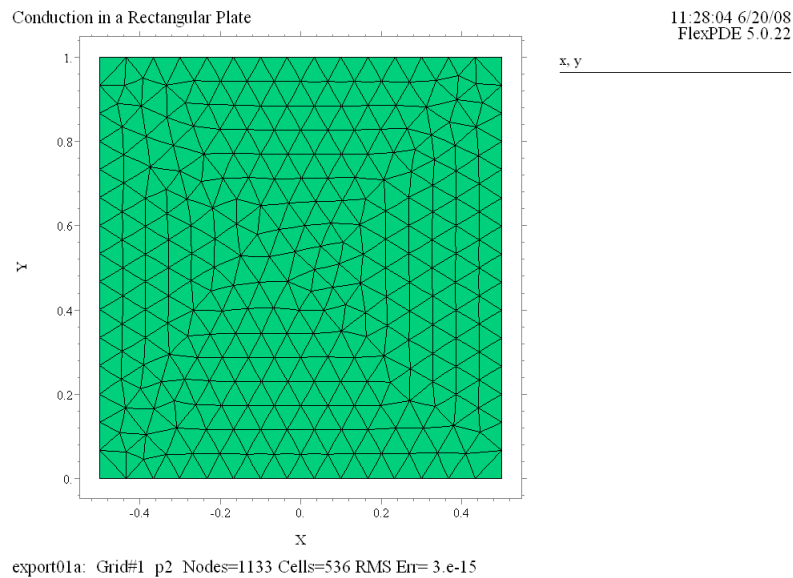
```
Grid(x, y)
Contour(U)    Surface(U)
Vector(E)
Contour(Jx)   Contour(Jy)   Contour(Jm)
Contour(U - U_ex)
```

**END**

## 1.2 実行結果

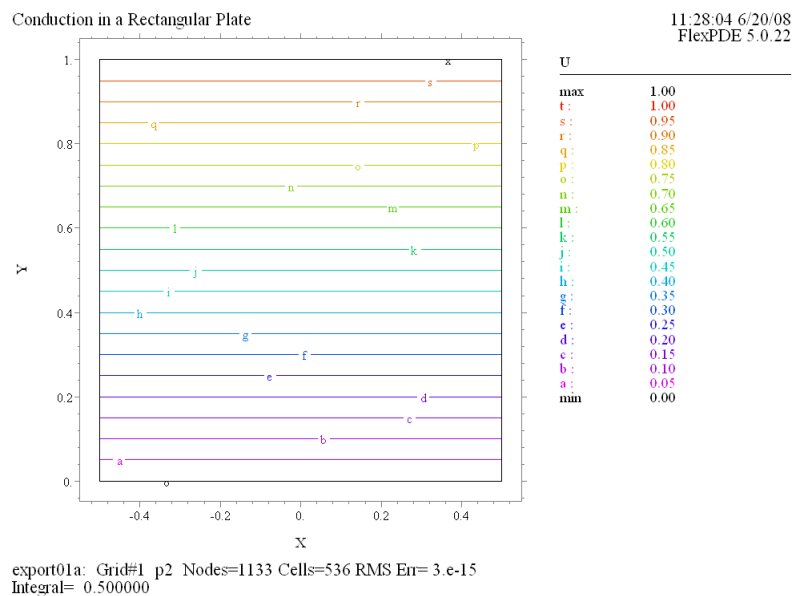
### (1) Grid(x, y)

FlexPDE によって設定されたグリッドの形状を示しています。セルの大きさはほぼ均等となっています。



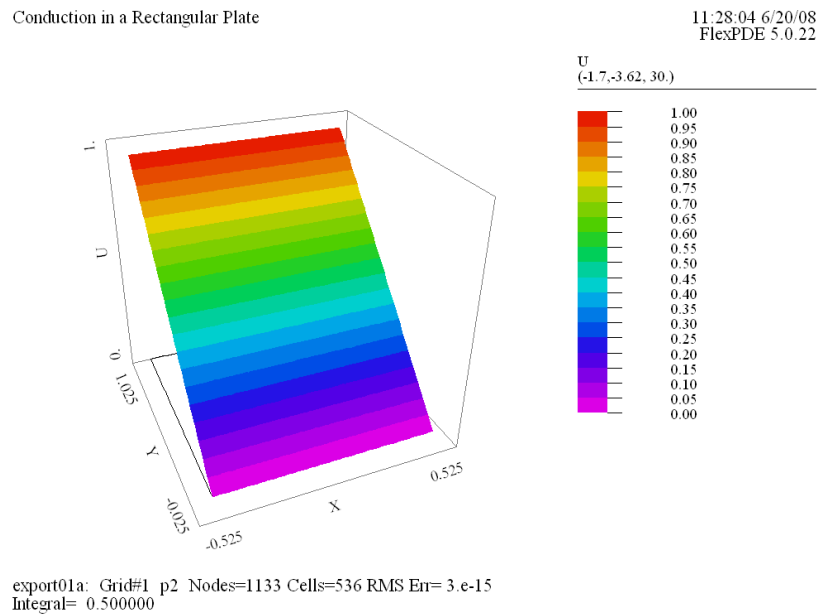
### (2) Contour(U)

解析対象領域（ドメイン）上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。



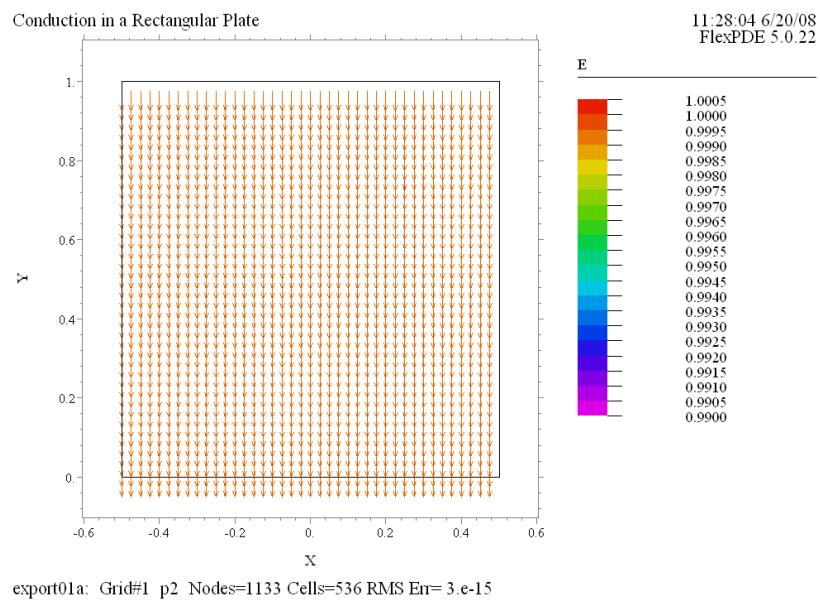
## (3) Surface(U)

関数  $U(x, y)$  の曲面の形状をプロットしたものです。この例では平面となっています。



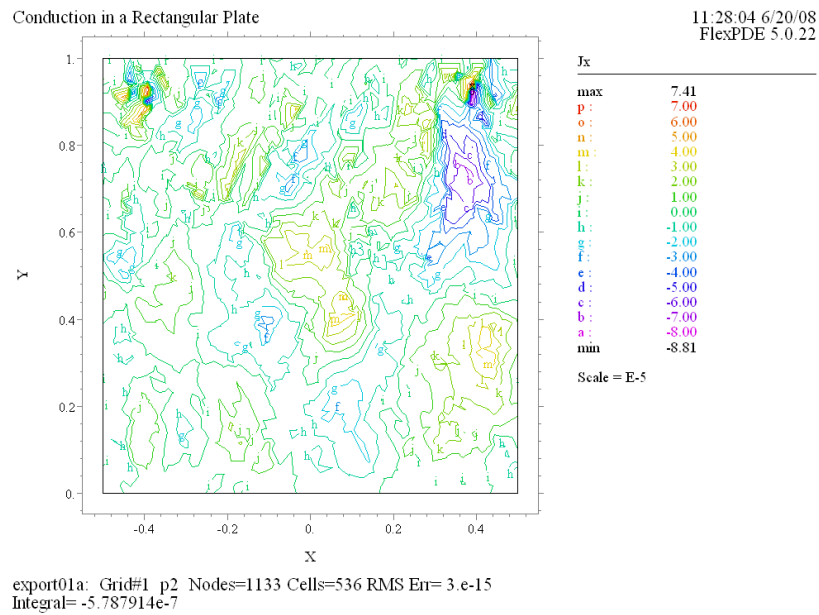
## (4) Vector(E)

電場  $E$  のベクトルプロットを示したものです。  $U$  の等高線とは直交したものとなります。



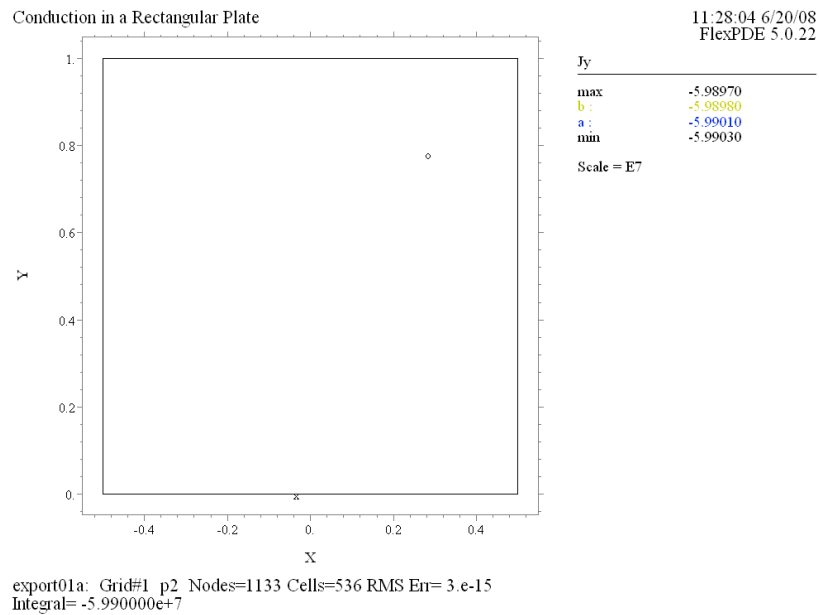
## (5) Contour(Jx)

電流密度ベクトル  $J$  の  $x$  成分の値に関する等高線図です。理論上は 0 であるべきところですが、数値計算ではわずかな誤差は避けられません。スケールが  $E-5$  である点にご注意ください。



## (6) Contour(Jy)

電流密度ベクトル  $J$  の  $y$  成分の値に関する等高線図です。すべて一律  $5.99e7$  という値となっているため等高線が現れておらず、余りおもしろい絵にはなっていません。

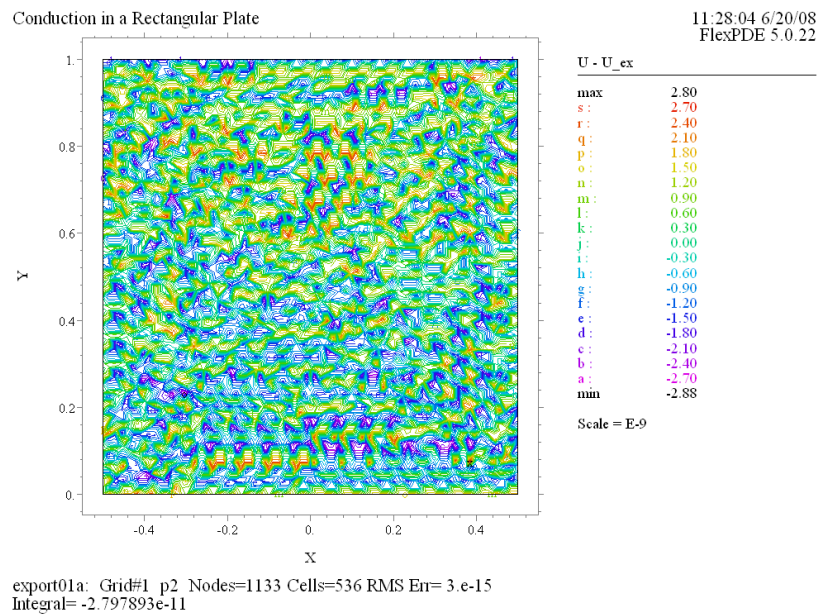


## (7) Contour(Jm)

電流密度ベクトル  $J$  の絶対値に関する等高線図ですが、実質 (6) の図と変わらないため省略します。

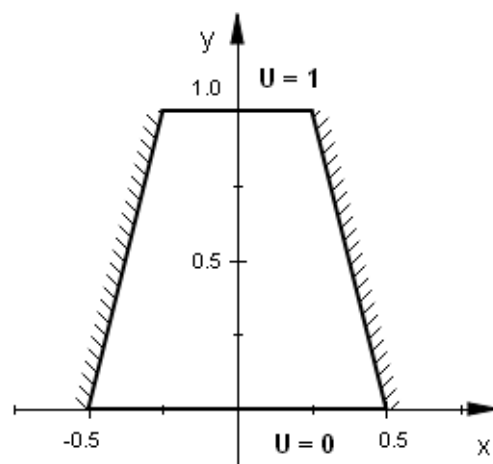
## (8) Contour(U - U\_ex)

これは FlexPDE の計算結果と理論曲面との差をプロットしたものです。スケールが  $E-9$  という表示になっている点にご注意ください。



## 2 Case2 - 台形プレート中の電導

今度はプレートの形状を台形に変えて電流の流れを調べてみましょう。この場合、解析的な手法で厳密解を求めることはできないので数値解に頼らざるを得ません。境界条件は前の例と同様、上辺で  $U = 1$ 、下辺で  $U = 0$ 、両側の斜辺は絶縁境界であるとして



## 2.1 Problem descriptor [ econduction01b.pde ]

基本形は Case1 で作成した econduction01a.pde と変わりません。

```

TITLE
  'Conduction in a Trapezoidal Plate'    { econduction01b.pde }

SELECT
  Errlim = 3e-5

VARIABLES
  U                      { Electric potential }

DEFINITIONS
  L1 = 0.5  L2 = 0.25  Ly = 1.0
  cond = 5.99e7          { Conductivity of Cu }
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
  Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  J = cond*E  Jm = magnitude(J)
                                     { Electrical current density }

EQUATIONS
  div(J)=0                { 2nd order PDE in U }

BOUNDARIES
  Region 1
  Start(-L1, 0)
  Value(U) = 0    Line to (L1, 0)
  Natural(U) = 0  Line to (L2, Ly)  { Insulated }
  Value(U) = 1.0 Line to (-L2, Ly)
  Natural(U) = 0  Line to Close     { Insulated }

PLOTS
  Grid(x, y)
  Contour(U)      Surface(U)
  Vector(E) norm
  Contour(Jx)     Contour(Jy)     Contour(Jm)

END

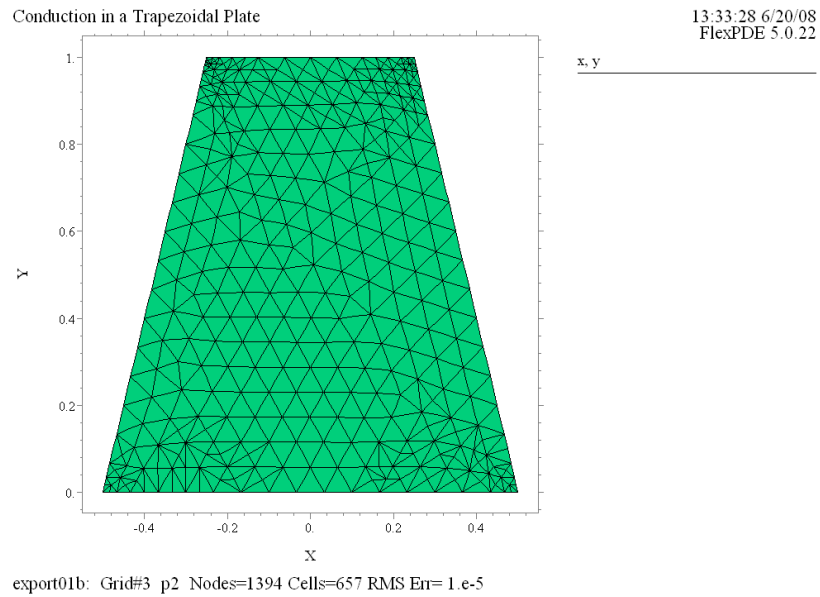
```



## 2.2 実行結果

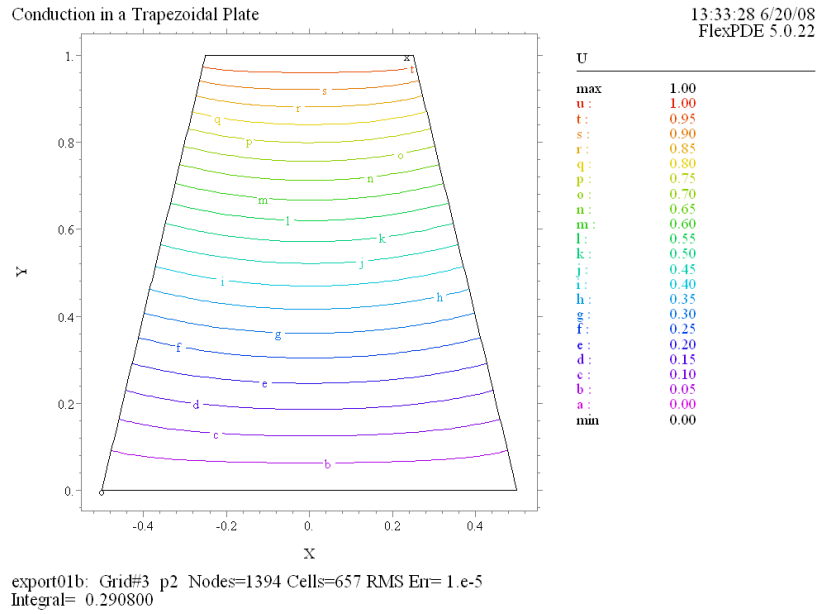
### (1) Grid(x, y)

FlexPDE によって自動生成されるメッシュはプレートの 4 隅の部分で密度の高いものとなっています。



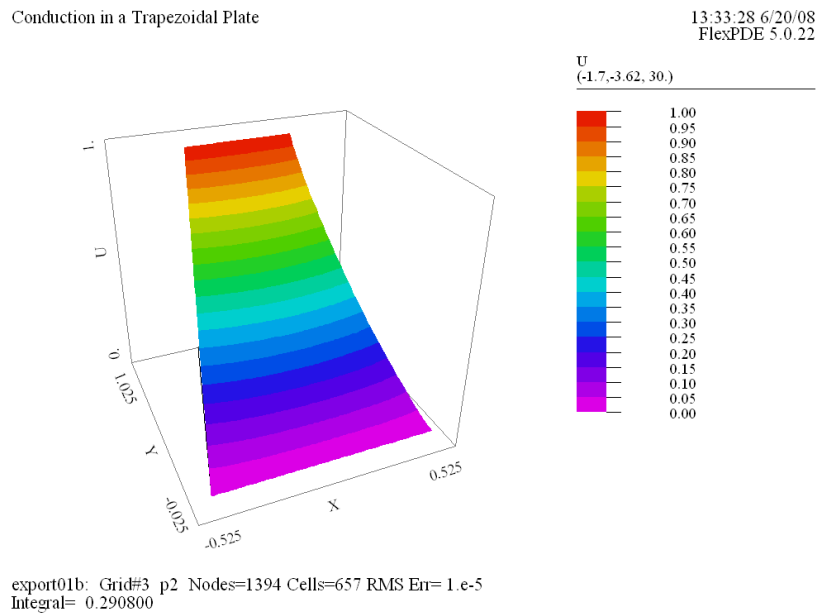
### (2) Contour(U)

解析対象領域（ドメイン）上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。上下の境界上で  $U$  の値が指定値となっていることが確認できます。なお、等高線がすべて斜辺と直交している点にご注意ください。これは絶縁境界上で  $U$  の法線微分  $\frac{\partial U}{\partial n}$  が 0 という条件からもたらされる帰結でもあります。



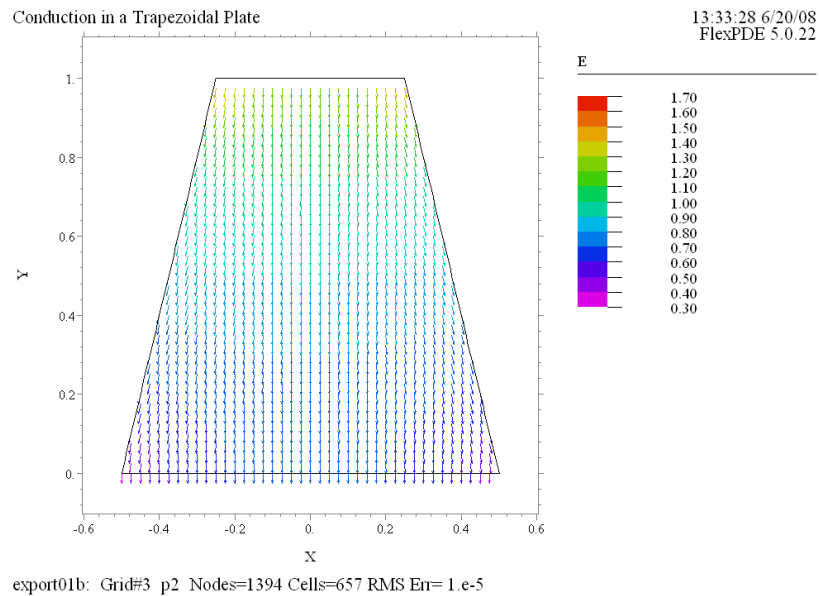
### (3) Surface(U)

関数  $U(x, y)$  の曲面の形状をプロットしたものです。

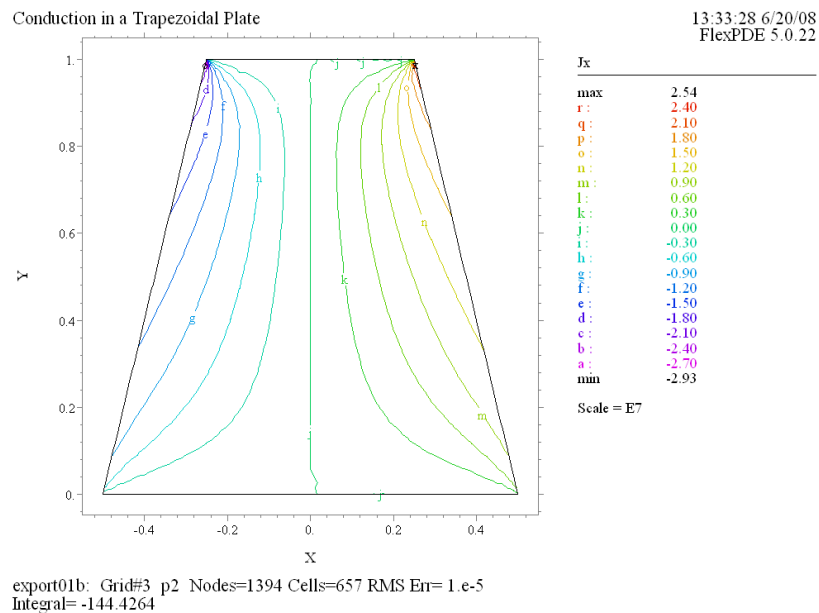


## (4) Vector(E) norm

電場ベクトル  $E$  のベクトルプロットを示したものです。norm という指定があるため、ベクトル長は一律となっています。斜辺に沿った部分ではベクトルが斜辺に平行となっている点に注意してください。

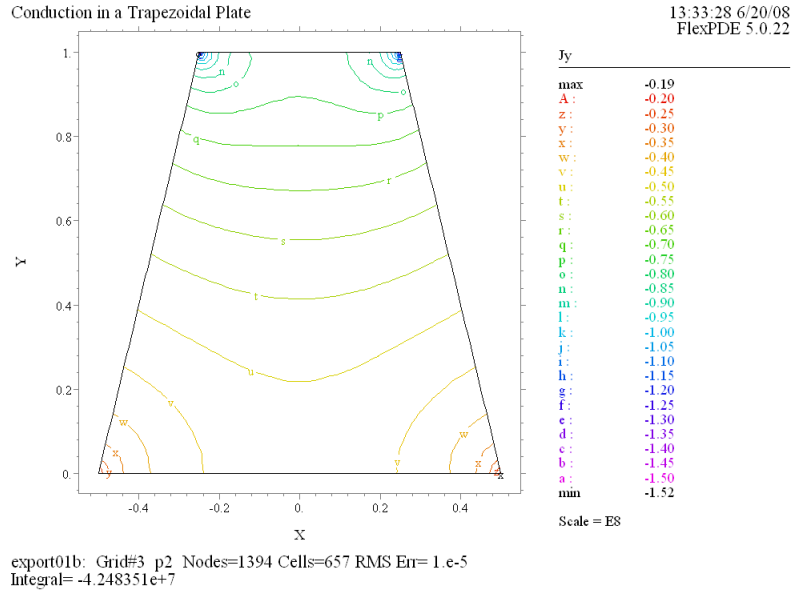
(5) Contour( $J_x$ )

電流密度ベクトル  $J$  の  $x$  成分の値に関する等高線図です。上辺から入った電流は徐々に左右に広がって行くため、 $J_x$  の値は矩形プレートの場合と異なり 0 とはなりません。



## (6) Contour(Jy)

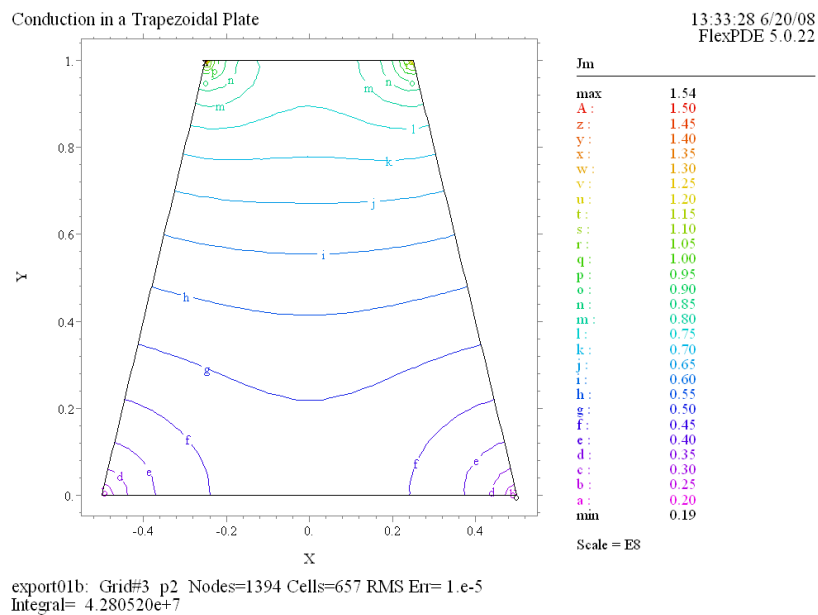
電流密度ベクトル  $J$  の  $y$  成分の値に関する等高線図です。



## (7) Contour(Jm)

電流密度ベクトル  $J$  の絶対値に関する等高線図です。上の角において  $|J|$  の値は最も大きくなっています。

(2) の  $U$  の等高線図よりわかることですが、上辺に近い部分での水平に近い等高線は斜辺の近傍でそれに直交するよう向きを変えることとなります。このため上の角の近くでは  $U$  の等高線が込み合った形となり、その結果として勾配がきつくなるわけです。



### 3 解の検証

台形プレート上での電導について得られた結果を検証してみます。具体的には解析対象のドメイン上で  $\text{div}(\mathbf{J})$  の値の等高線図をプロットし、0に近いものとなっているかどうかをチェックします。また上辺(より正確に言うと厚さ 1 の上面)から流入する電流の量が下辺(厚さ 1 の下面)から流出する電流の量に等しいかどうかともチェックします。具体的には Elevation プロットの出力結果の一部である積分値を比較します。

#### 3.1 Problem descriptor [ econduction01c.pde ]

ここでは Case2 で作成したスクリプト econduction01b.pde に対する変更分のみを記すことにします。

```
TITLE
  'Conduction in a Trapezoidal Plate, PDE Test'    { econduction01c.pde }

...
DEFINITIONS
  ...
  eqn = div(J)

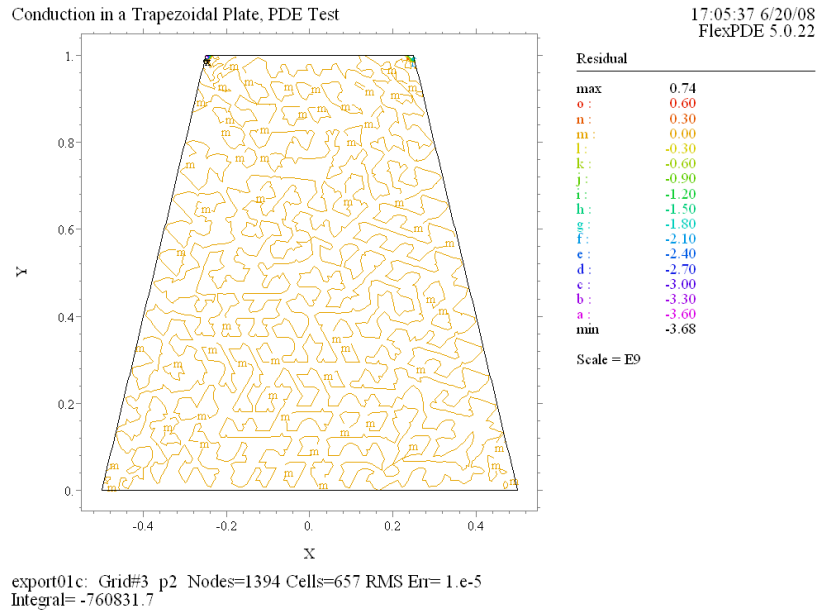
...
PLOTS
  Contour(eqn) as 'Residual'
  Elevation(Jy) from (-L1, 0) to (L1, 0)
  Elevation(Jy) from (-L2, Ly) to (L2, Ly)

END
```

#### 3.2 実行結果

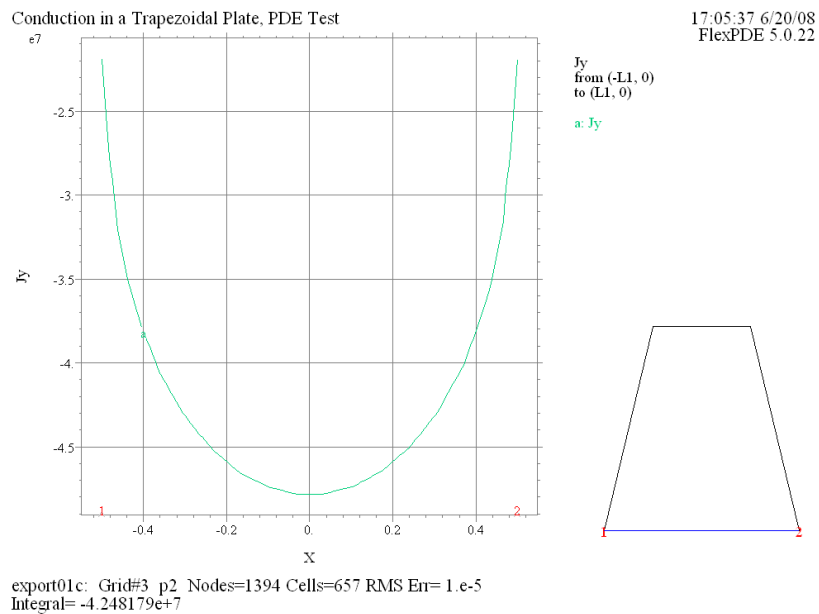
(1) Contour(eqn) as 'Residual'

$\text{div}(\mathbf{J})$  の値に関する 0 の等高線図がプロットされています。上辺の角の点を除けば 0 以外の等高線は現れていません。



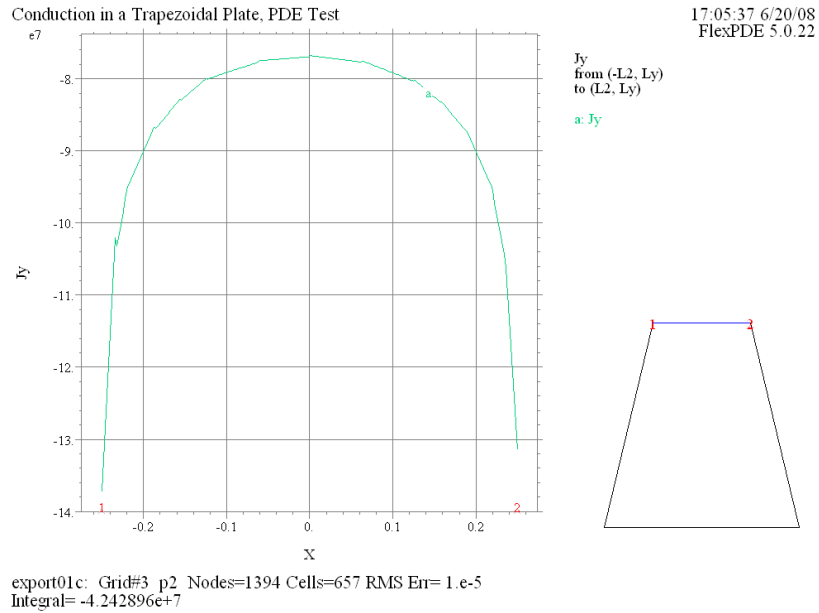
(2) Elevation( $J_y$ ) from  $(-L1, 0)$  to  $(L1, 0)$

$J_y$  の値を下辺に沿ってプロットしたものです。この描画用メッシュを利用して境界上での  $J_y$  の積分値を計算したものが  $\text{Integral} = -4.248179e + 7$  という形で示されている点にご注意ください。



(3) Elevation( $J_y$ ) from  $(-L_2, Ly)$  to  $(L_2, Ly)$ 

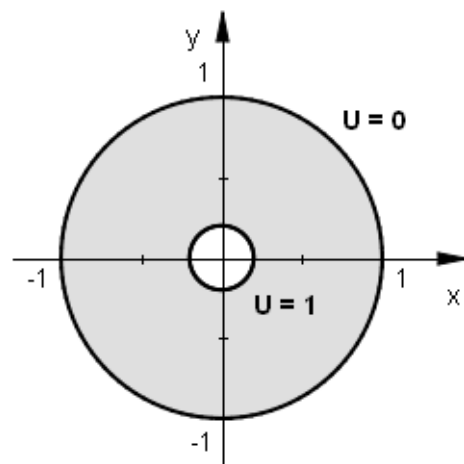
$J_y$  の値を上辺に沿ってプロットしたものです。この境界上での  $J_y$  の積分値は  $\text{Integral} = -4.242896e + 7$  と算出されています。下辺での積分値との違いは 0.12% であり、十分小さなレベルにおさまっていると言えるでしょう。



## 4 Case3 - 円形フォイル中の電導

今度は銅製の薄いフォイル中での電導の問題について考えることにします。フォイルの外周は半径 1 のチューブに、内周は同軸上にある半径 0.2 の金属棒に垂直に溶接されているものとします（共に銅製）。GB002 では  $z$  軸方向に十分な長さのある金属棒/箱の切断面において電場を考えましたが、電導性のフォイルや板の場合にはそのような前提は必要ありません。絶縁境界によって電流は  $x-y$  平面に平行に流れることになるからです。

フォイルの内周は電位 1 に、外周は電位 0 に保たれているケースをここでは想定し、FlexPDE による計算を実行します。



## 4.1 Problem descriptor [ econduction01d.pde ]

Case2 で作成した econduction01b.pde をベースにスクリプトを用意します。

```

TITLE
  'Radial Conduction in a Foil'    { econduction01d.pde }

SELECT
  Errlim = 3e-5

VARIABLES
  U                                { Electric potential }

DEFINITIONS
  r1 = 0.2  r2 = 1
  cond = 5.99e7    { Conductivity of Cu }
  U1 = 1.0        { Voltage }
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
  Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  J = cond*E  Jm = magnitude(J)
                                     { Electrical current density }

EQUATIONS
  div(J)=0          { 2nd order PDE in U }

BOUNDARIES
  Region 1
  Start(r2, 0)      { Outer }
  Value(U) = 0  Arc(Center = 0,0) Angle = 360
  Start(r1, 0)      { Exclude }
  Value(U) = U1  Arc(Center = 0,0) Angle = 360

PLOTS
  Grid(x, y)
  Contour(U)      Surface(U)
  Vector(E) norm
  Contour(Jx)    Contour(Jy)    Contour(Jm)

END

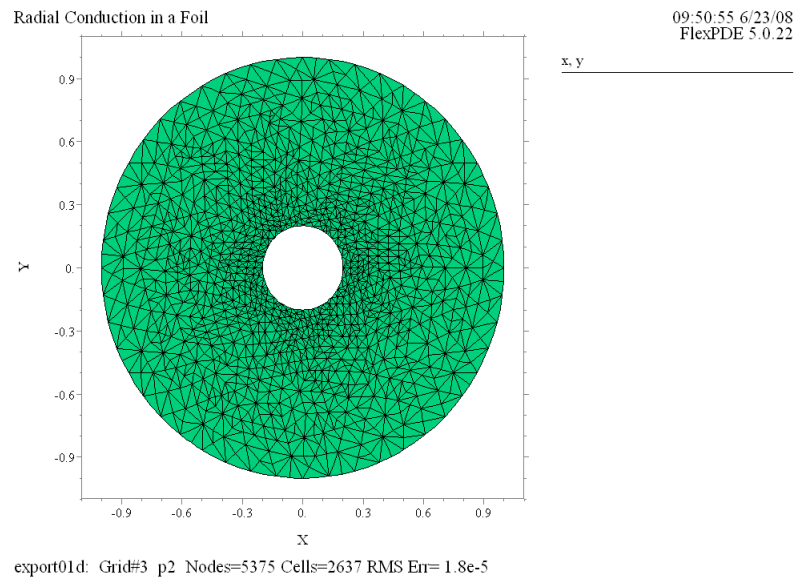
```



## 4.2 実行結果

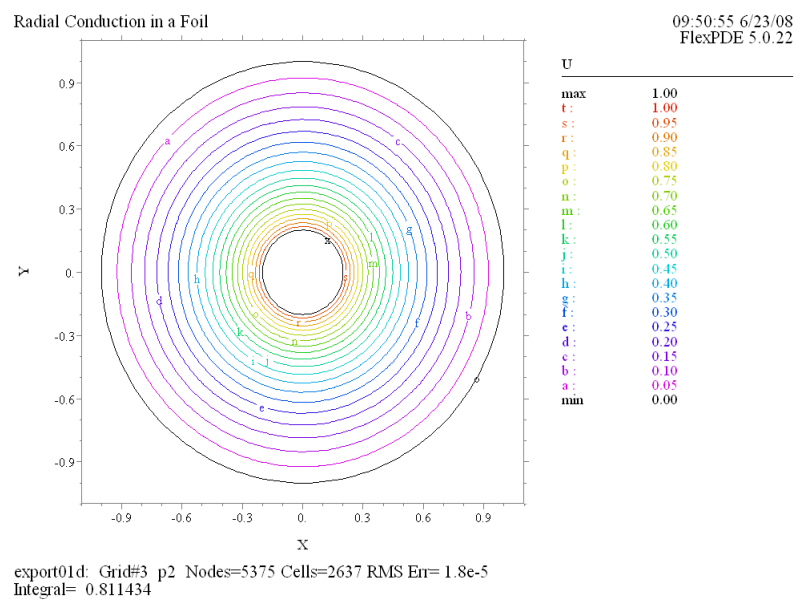
### (1) Grid(x, y)

FlexPDE によって自動生成されたメッシュは内周部で密度の高いものとなっています。



### (2) Contour (U)

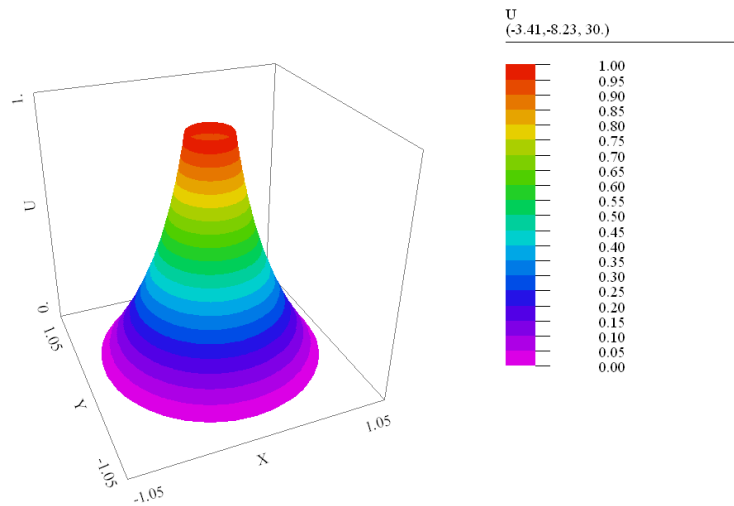
解析対象領域（ドメイン）上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。内周部で  $U = 1$ 、外周部で  $U = 0$  という境界条件は満たされています。電流はこれらの同心円状の等電位線に直交する形で流れていきます。



## (3) Surface(U)

関数  $U(x, y)$  の曲面の形状をプロットしたものです。

Radial Conduction in a Foil

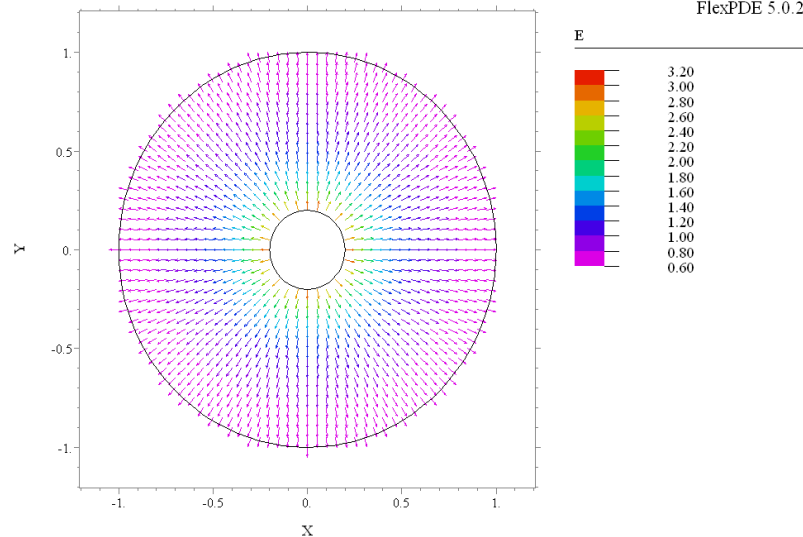
09:50:55 6/23/08  
FlexPDE 5.0.22

export01d: Grid#3 p2 Nodes=5375 Cells=2637 RMS En= 1.8e-5  
Integral= 0.811434

## (4) Vector(E) norm

電場ベクトル  $E$  のベクトルプロットを示したものです。予想された通り、中心から放射状に広がるベクトル場となっています。

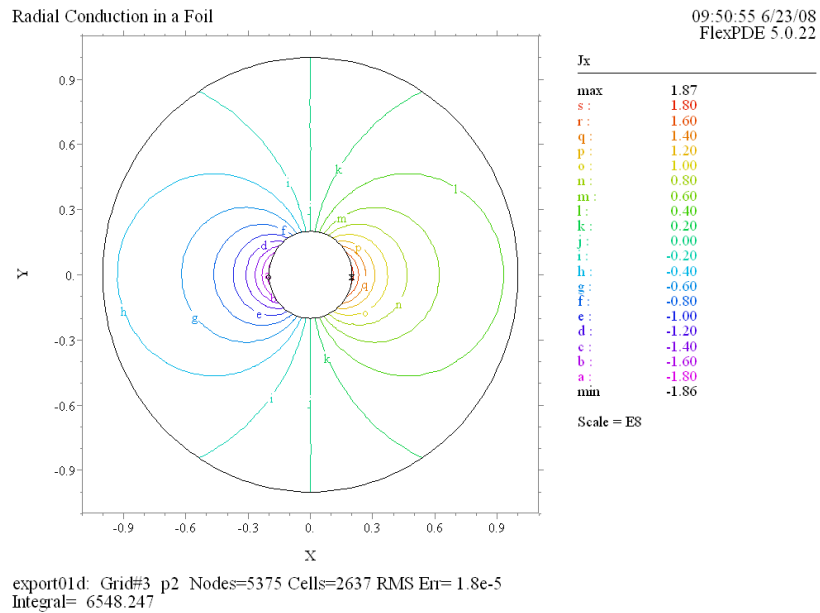
Radial Conduction in a Foil

09:50:55 6/23/08  
FlexPDE 5.0.22

export01d: Grid#3 p2 Nodes=5375 Cells=2637 RMS En= 1.8e-5

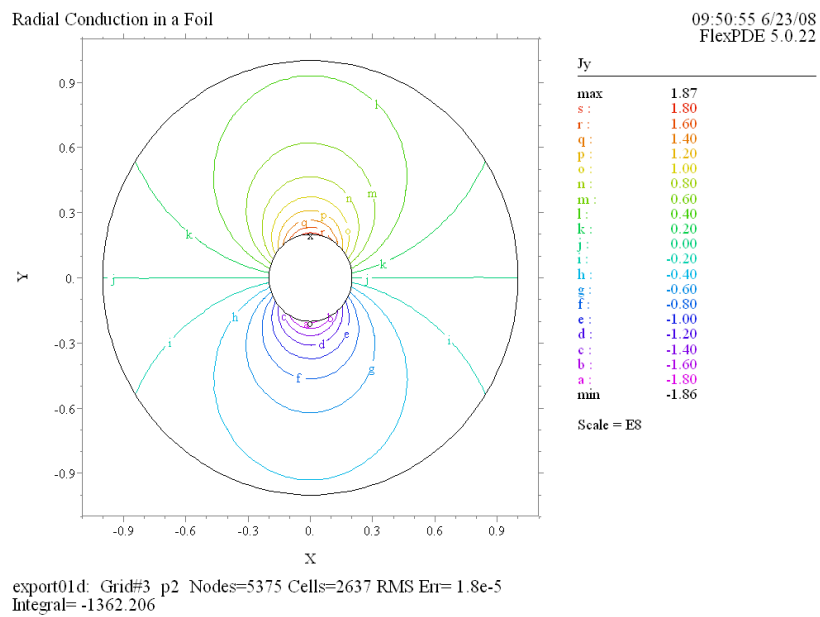
## (5) Contour(Jx)

電流密度ベクトル  $J$  の  $x$  成分の値に関する等高線図です。



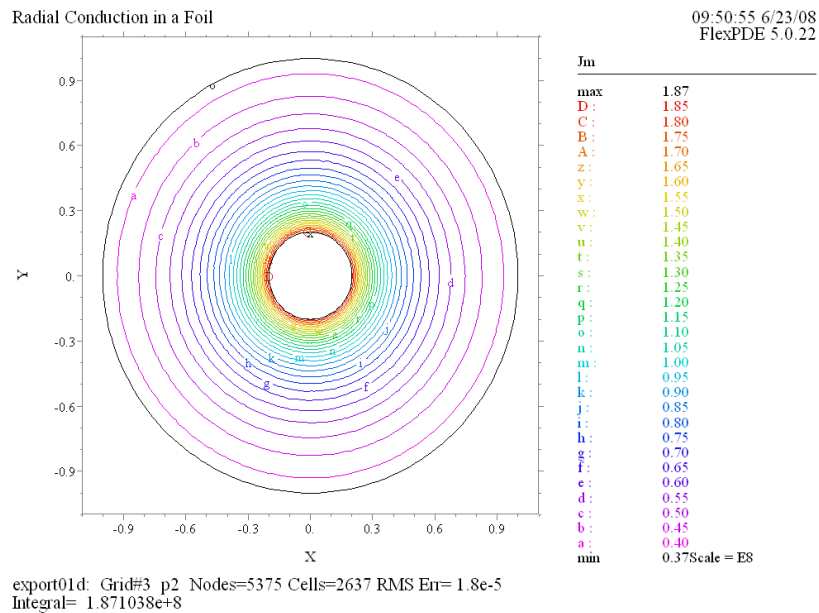
## (6) Contour(Jy)

電流密度ベクトル  $J$  の  $y$  成分の値に関する等高線図です。



## (7) Contour(Jm)

電流密度ベクトル  $J$  の絶対値に関する等高線図です。内周部分で最も大きく、外周に近づくにつれて小さな値になっています。

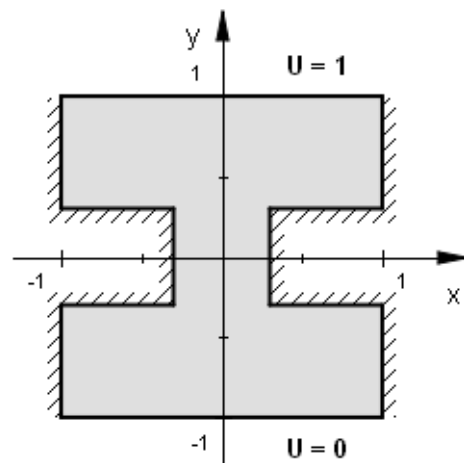


本ケースの場合、解析対象の領域が対称形であるため、ドメインを例えば四分円の部分に限るといったアプローチを取ることもできます。それによってメッシュ密度は4倍になるので計算精度の向上が期待できます。なお、対称境界上では  $\text{Natural}(U) = 0$  という指定を行うことになります。

## 5 Case4 - くびれのある矩形プレート

今度は右の図のようなくびれのある銅製プレート上での電導に関し FlexPDE で分析を行ってみましょう。1辺が2の正方形のプレートに対し、その中央部に幅が0.6、深さが0.7のくびれが左右から入っているモデルを想定します。上辺に  $U = 1$  の電位をかけ、下辺の電位は0に保持、その他の境界は絶縁されているとして電流の流れを分析します。

Case2 の `econduction01b.pde` をベースに作成したのが次のスクリプトです。



## 5.1 Problem descriptor [ econduction01e.pde ]

```

TITLE
  'Constricted Rectangular Plate'    { econduction01e.pde }
SELECT
  Errlim = 3e-4
VARIABLES
  U                                  { Electric potential }

DEFINITIONS
  L = 1.0  d = 0.3
  cond = 5.99e7      { Conductivity of Cu }
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
  Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  J = cond*E  Jm = magnitude(J)
                                          { Electrical current density }

EQUATIONS
  div(J)=0              { 2nd order PDE in U }

BOUNDARIES
  Region 1
  Start 'boundary' (-L, -L)
  Value(U) = 0  Line to (L, -L)
  Natural(U) = 0  { Insulated }
  Line to (L, -d) to (d, -d) to (d, d) to (L, d) to (L, L)
  Value(U) = 1.0  Line to (-L, L)
  Natural(U) = 0  { Insulated }
  Line to (-L, d) to (-d, d) to (-d, -d) to (-L, -d) to Close

PLOTS
  Grid(x, y)
  Contour(U)  Surface(U)
  Vector(E) norm  Surface(Em)
  Contour(Jx) painted  Contour(Jy) painted  Contour(Jm) painted
  Elevation(U) on 'boundary'  Elevation(Jm) on 'boundary'

END

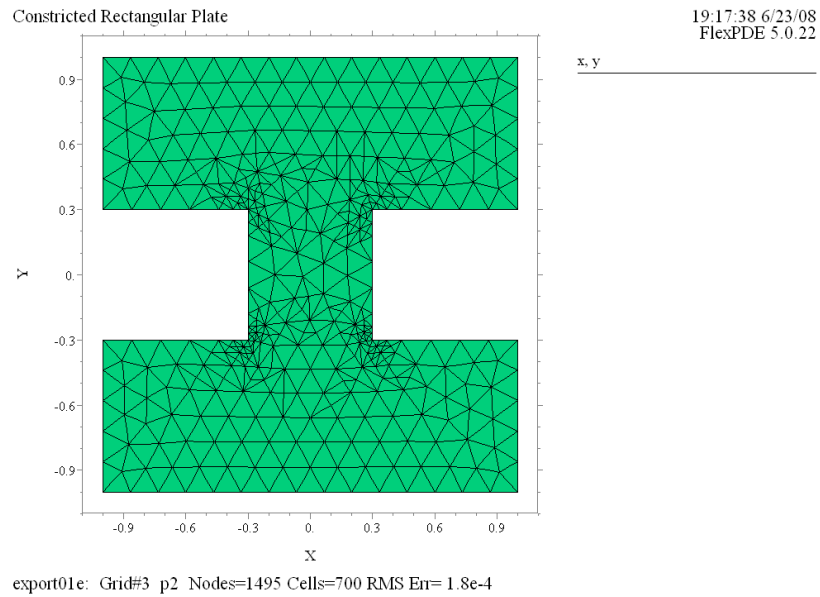
```

$J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_m$  の等高線図に対しては塗りつぶしを施すべく `painted` という修飾子を指定している点がこれまでと異なります。

## 5.2 実行結果

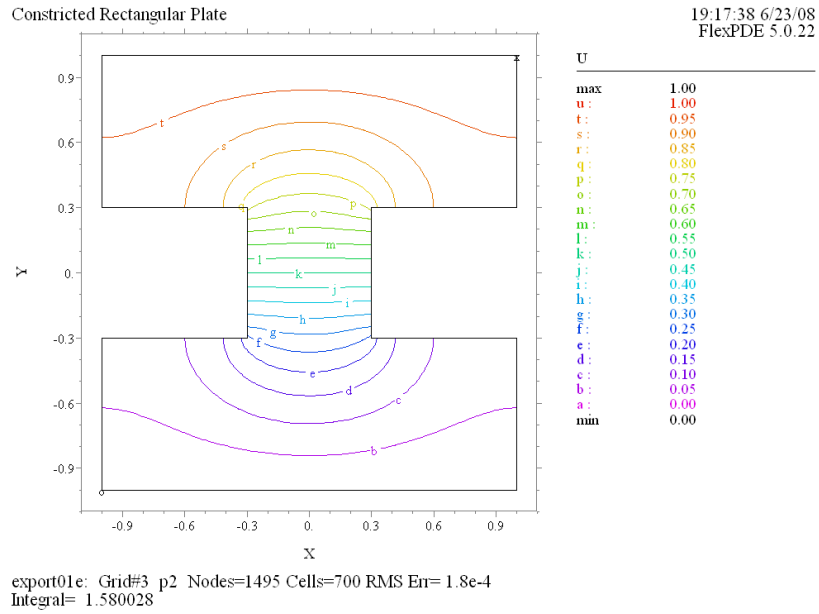
### (1) Grid(x, y)

FlexPDE は Errlim で指定された演算精度が得られなかった場合、メッシュの細分化を行った上で再度計算をやり直します。今回の場合、“Grid#3”という出力に示されているように、メッシュの再構成 (regridding) が2回行われています。結果としてくびれの角の部分でメッシュ密度が高いものとなっています。



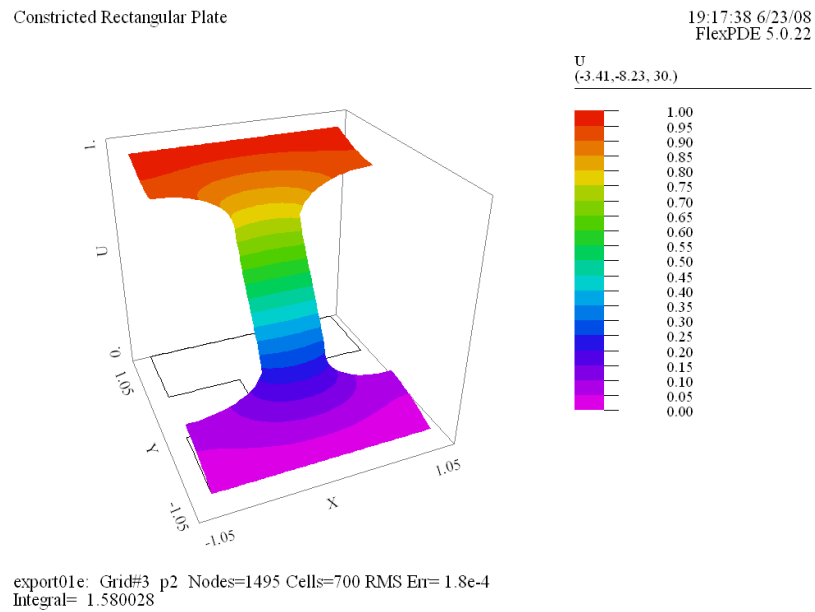
### (2) Contour(U)

解析対象領域 (ドメイン) 上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。本来水平線であるべき等電位線がくびれの部分に近づくにつれて大きく湾曲していることがわかります。



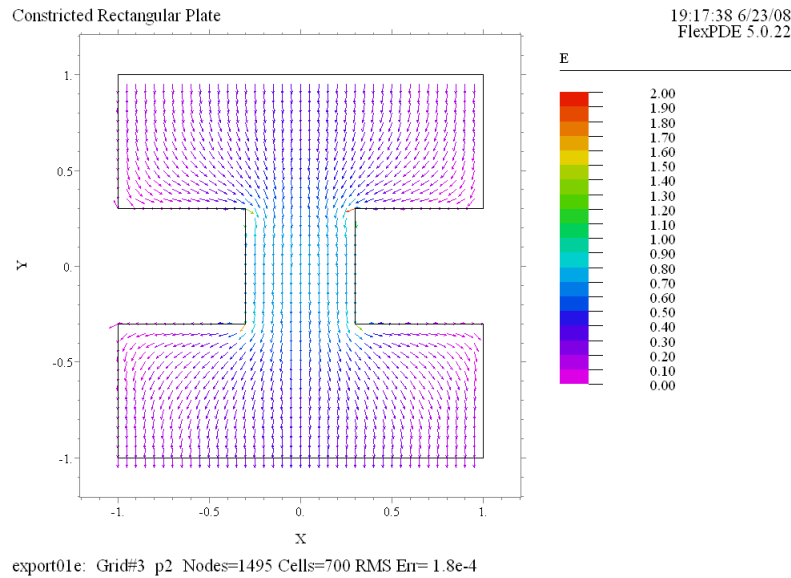
### (3) Surface(U)

関数  $U(x, y)$  の曲面の形状をプロットしたものです。



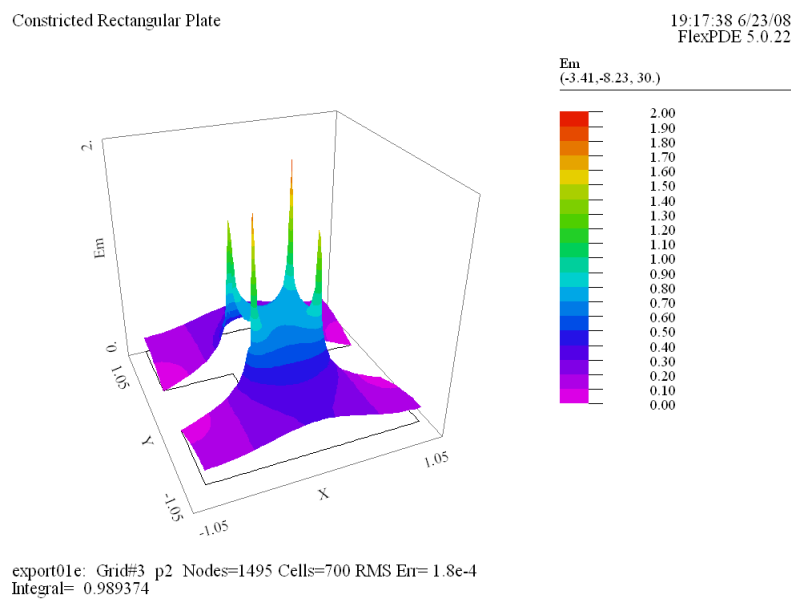
## (4) Vector(E) norm

電場ベクトル  $E$  のベクトルプロットを示したものです。norm という修飾子を指定しているため、ベクトル場の向きの変化は明確ですが、大きさの変化は少々読み取りにくいものとなっています。この点を補うものが (5) のプロットです。



## (5) Surface(Em)

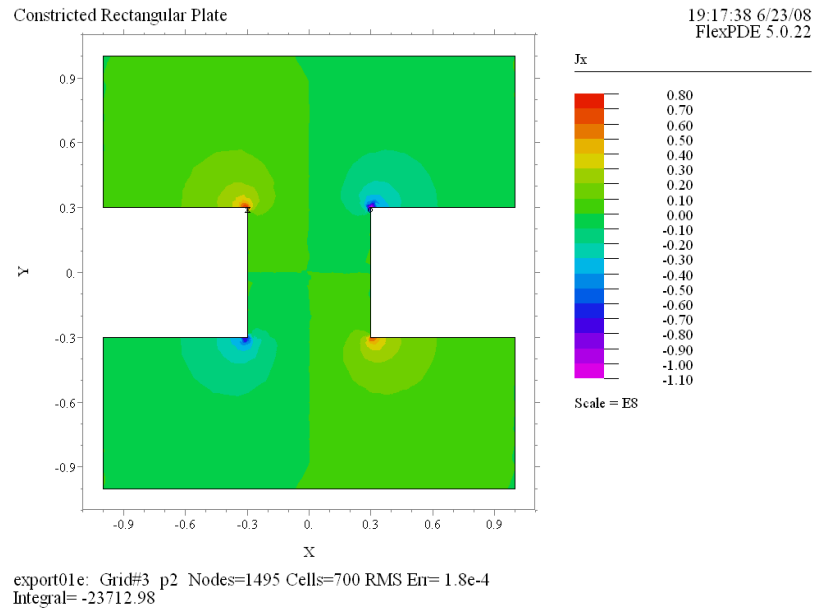
電場ベクトル  $E$  の絶対値が場所によってどう変化するかを示した曲面図です。くびれの角の部分で異常に大きな値となっていることがわかります。これは工学上も重要な意味を持てきます。



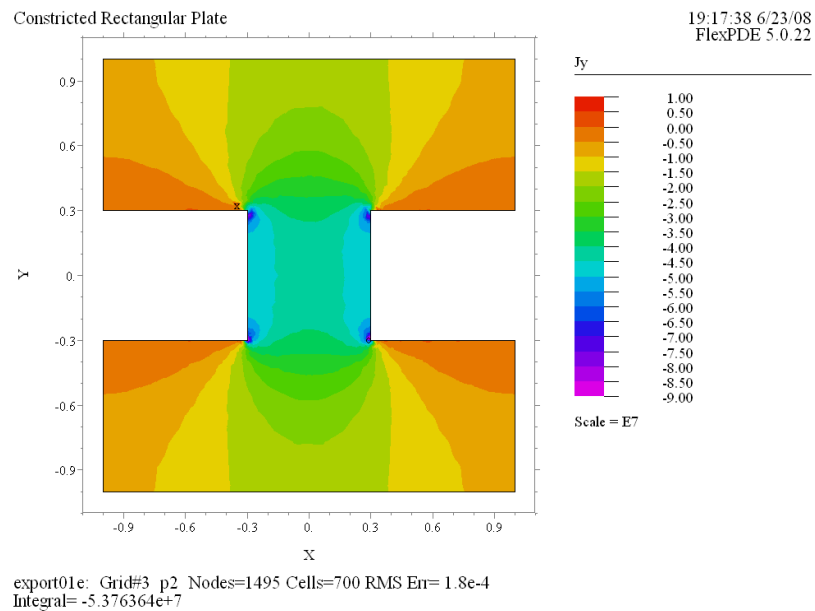


(6) Contour( $J_x$ ) painted

電流密度ベクトル  $J$  の  $x$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。

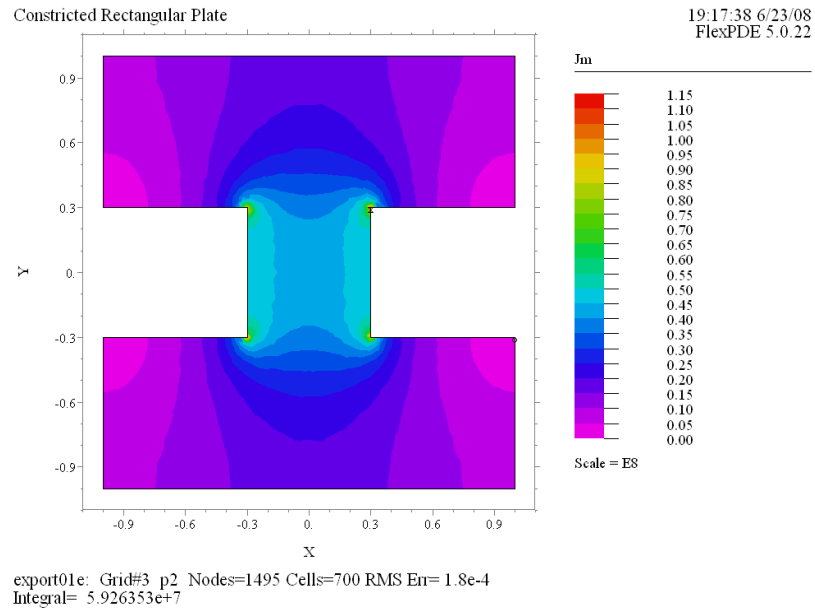
(7) Contour( $J_y$ ) painted

電流密度ベクトル  $J$  の  $y$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。



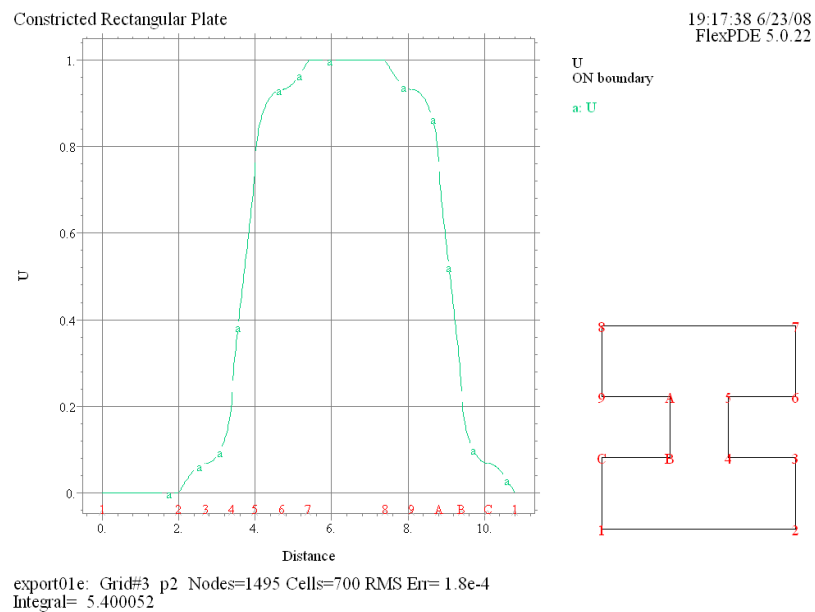
## (8) Contour(Jm) painted

電流密度ベクトル  $J$  の絶対値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。 $J = \text{cond} \cdot E$  という関係式を考慮すると  $|J|$  の曲面図は (5) と同じ形状となります。くびれの角の部分におけるピークには注意を払う必要があります。



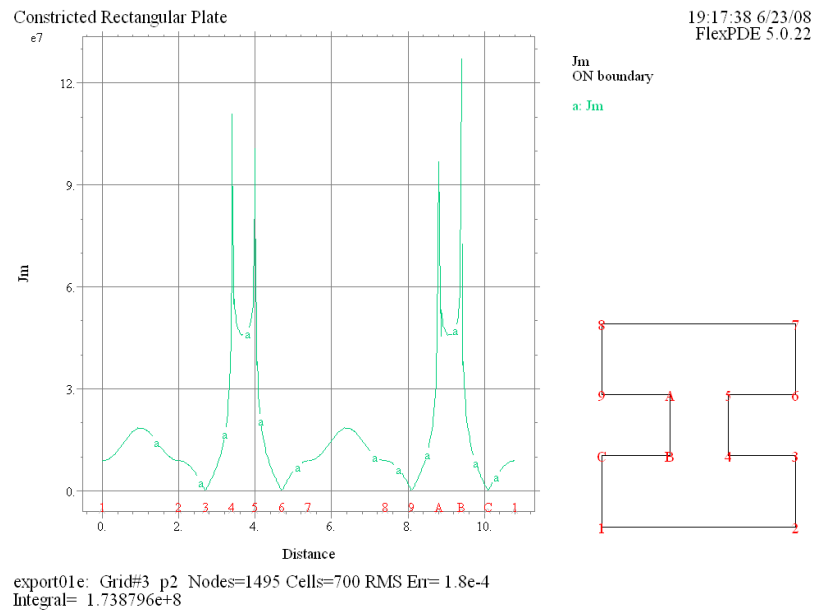
## (9) Elevation(U) on 'boundary'

境界線上での  $U$  の値の変化をプロットしたものです。



## (10) Elevation(Jm) on 'boundary'

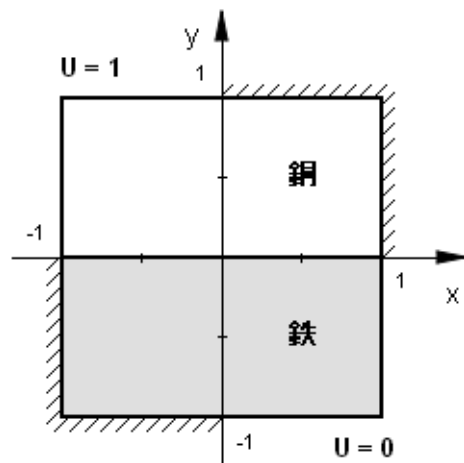
境界線上での  $|J|$  の値の変化をプロットしたものです。くびれの角の部分におけるピークの存在が明確に示されています。



## 6 Case5 - 2種の金属からなる矩形プレート

これまででは均一な材質からなるオブジェクトのみを扱ってきましたが、FlexPDE では材質が連続的に変化する場合や不連続に変化する場合も容易に扱えます。ここでは右図に示すように上半分は銅、下半分は鉄からなる金属プレートを考えることにします。ハッチングを施した境界は絶縁されているとし、左上隅に  $U = 1$  の電位をかけ、右下隅の電位は  $U = 0$  に保つものとします。このときの電導のパターンを調べてみましょう。

Case2 の `econduction01b.pde` をベースにスクリプトを作成します。



## 6.1 Problem descriptor [ econduction01f.pde ]

```

TITLE
  'Conduction in a Rectangular Plate(Cu/Fe)'    { econduction01f.pde }

SELECT
  Errlim = 3e-4

VARIABLES
  U                      { Electric potential }

```

DEFINITIONS セクションで規定するパラメータ cond の値はデフォルト値の性格を持ちます。以下で 'iron' リージョンを定義する際、リージョン固有の cond の値を設定している点に注意してください。

```

DEFINITIONS
  Lx = 1  Ly = 1.0
  cond = 5.99e7      { Conductivity of Cu }
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
  Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  J = cond*E  Jm = magnitude(J)
                                     { Electrical current density }
  J_angle = sign(Jy)*arccos(Jx/Jm)/PI*180

EQUATIONS
  div(J)=0          { 2nd order PDE in U }

```

BOUNDARIES セクションでは最初にドメイン全体を Region1 として定義、次に Region 'iron' という形で鉄製のリージョンを定義します。

```

BOUNDARIES
  Region 1          { Entire domain }
  Start 'boundary' (0, -Ly)
  Value(U) = 0     Line to (Lx, -Ly) to (Lx, 0)
  Natural(U) = 0   Line to (Lx, Ly) to (0, Ly) { Insulated }
  Value(U) = 1.0   Line to (-Lx, Ly) to (-Lx, 0)
  Natural(U) = 0   Line to (-Lx, -Ly) to Close { Insulated }

  Region 'iron' cond = 1.03e7 { Iron region }
  Start (-Lx, -Ly) Line to (Lx, -Ly) to (Lx, 0) to (-Lx, 0) to Close

```

Ex, Ey, Jx, Jy の等高線プロットの指定において zoom という修飾子が用いられています。これはドメインの一部分のみを拡大表示するためです。

#### PLOTS

```

Grid(x, y)
Contour(U) Elevation(U) on 'boundary'
Elevation(normal(J)) on 'boundary'
Vector(J) norm
Contour(J.angle) painted
Contour(Ex) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)
Contour(Ey) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)
Contour(Jx) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)
Contour(Jy) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)

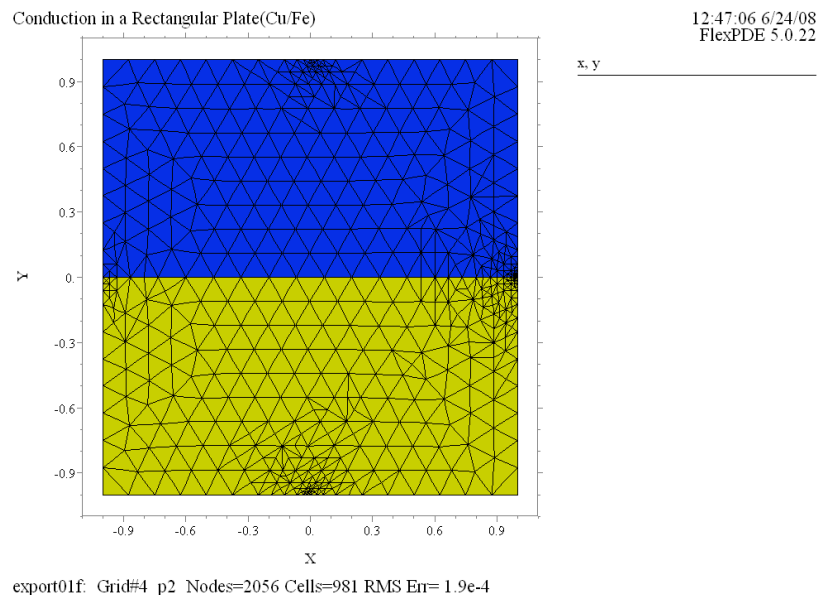
```

END

## 6.2 実行結果

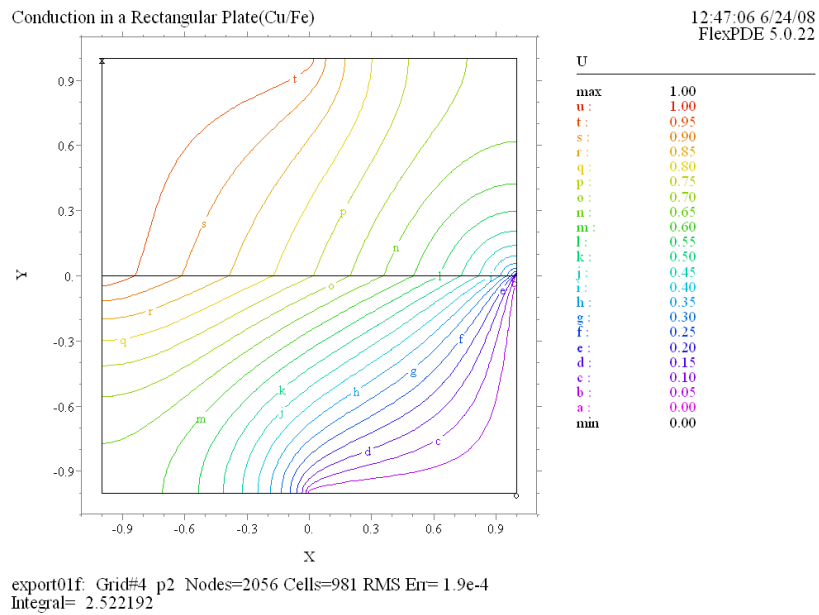
### (1) Grid(x, y)

“Grid#4” という表示に示されているように、所定の精度を得るために 3 回のメッシュ再構成が行われています。



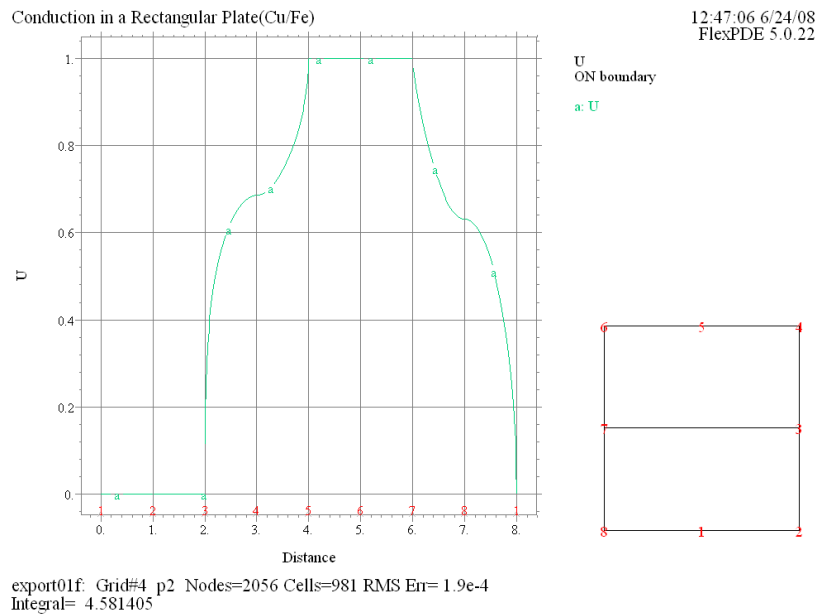
## (2) Contour(U)

解析対象領域（ドメイン）上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。銅と鉄との境界をまたいで等電位線は連続ですが、向きは大きく変化しています。



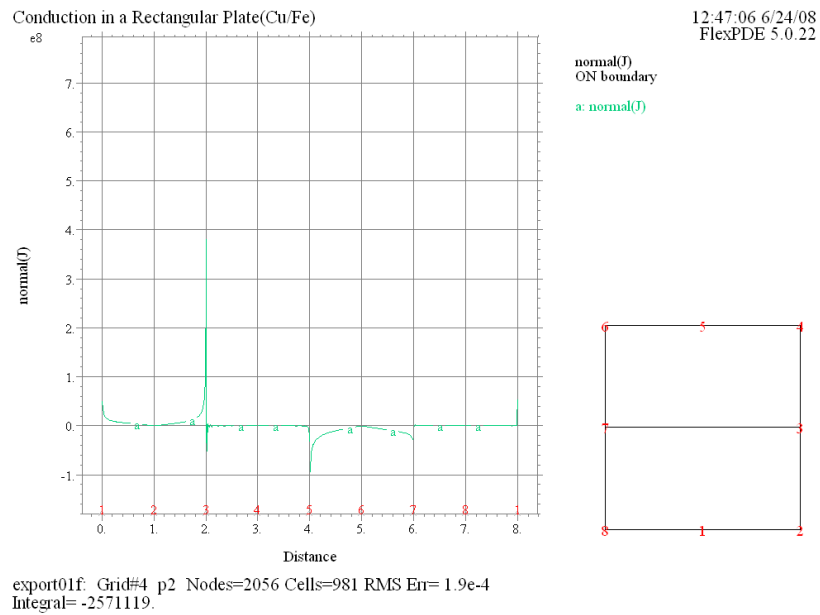
## (3) Elevation(U) on 'boundary'

関数  $U$  の値を境界線上でプロットしたものです。左上隅で  $U = 1$ 、右下隅で  $U = 0$  であることが確認できます。



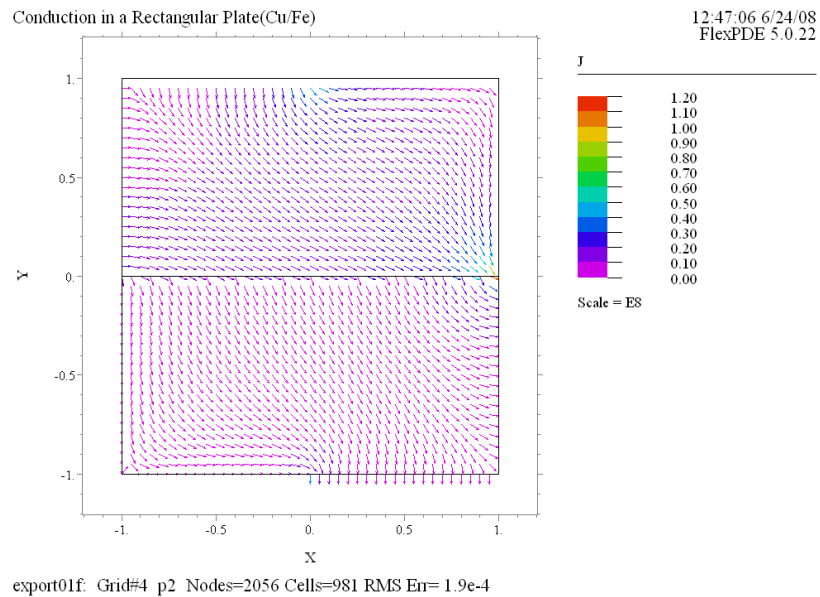
## (4) Elevation(normal(J)) on 'boundary'

電流密度ベクトル  $J$  の法線成分の値を境界上でプロットしたものです。絶縁境界部分で値が 0 となっていることが確認できます。



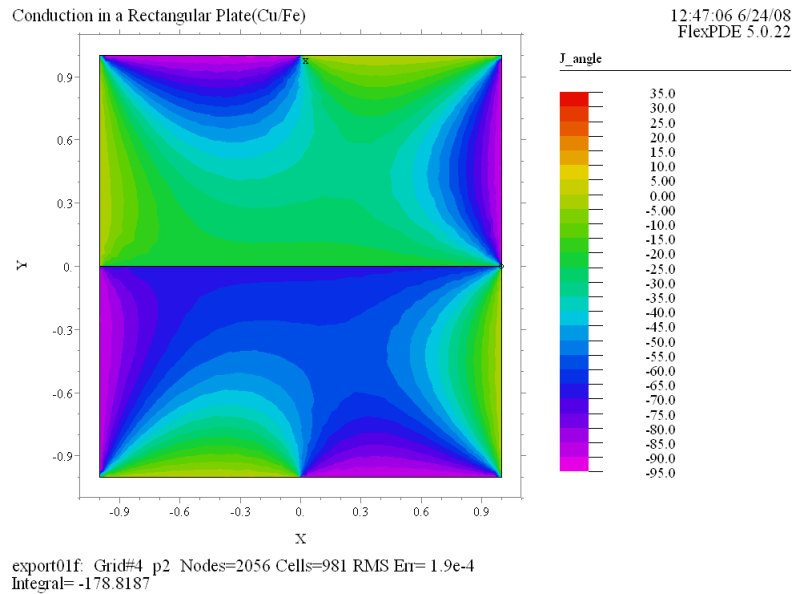
## (5) Vector(J) norm

電流密度ベクトル  $J$  のベクトル場の様子をプロットしたものです。  $U$  の等高線とは直交する流れとなっています。また材質境界では回折が起っています。



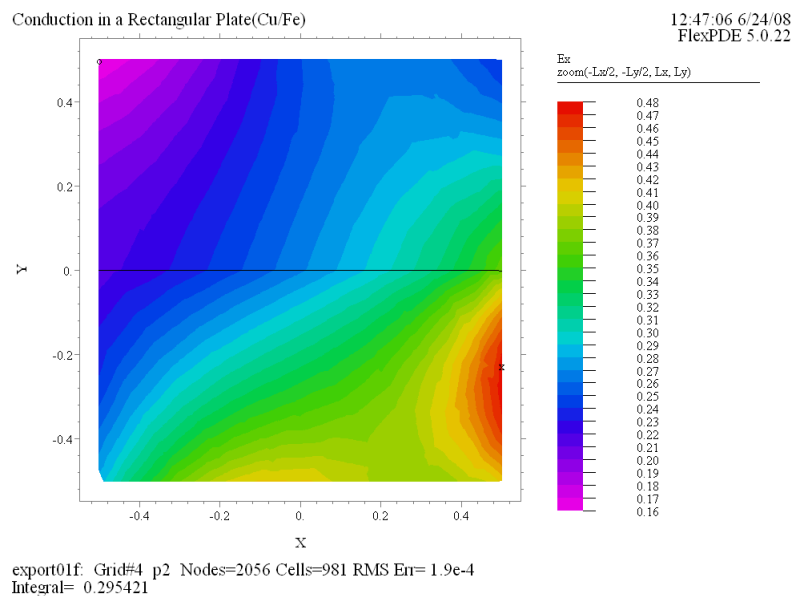
## (6) Contour(J\_angle) painted

電流密度ベクトル  $J$  の角度について等高線図を描いたものです。



## (7) Contour(Ex) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)

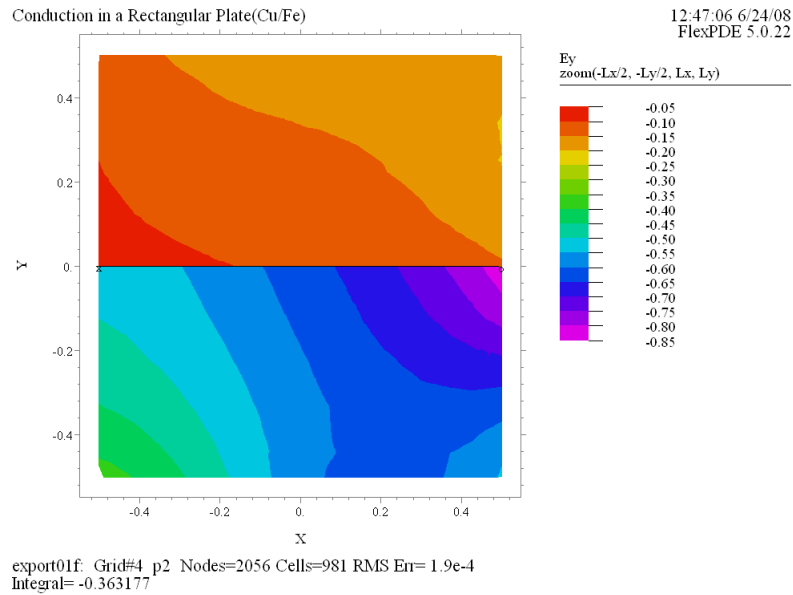
電場ベクトル  $E$  の  $x$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。表示されているのは座標点  $(-\frac{L_x}{2}, -\frac{L_y}{2})$  より右に  $L_x$ , 上に  $L_y$  の範囲である点に注意してください。伝導率の異なる材質境界をはさんで  $E_x$  の値が連続的に変化していることが確認できますが、これは理論からの要請 [1] に符合するものでもあります。





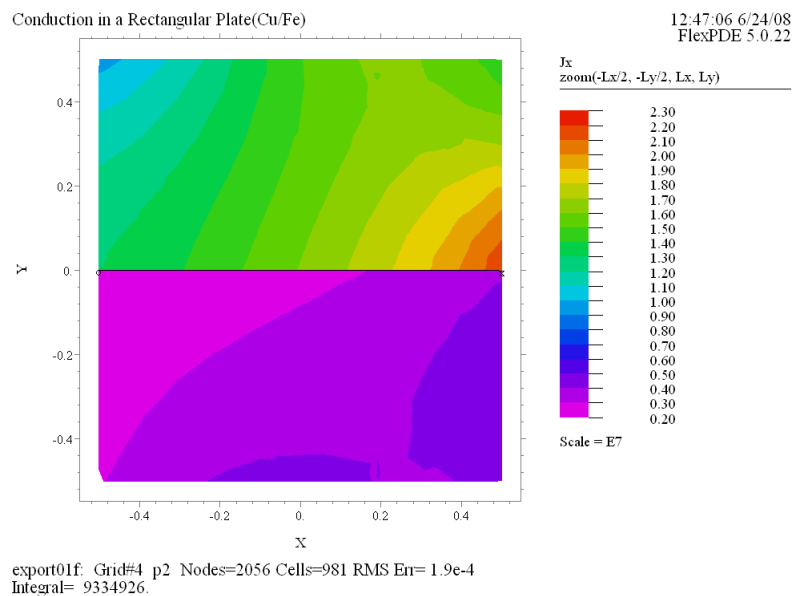
## (8) Contour(Ey) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)

電場ベクトル  $E$  の  $y$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。ドメインの中央部を拡大表示したのですが、 $E_y$  の値は材質境界の両側で不連続に変化している点に注意してください ( $J_y$  の方は連続的に変化します)。



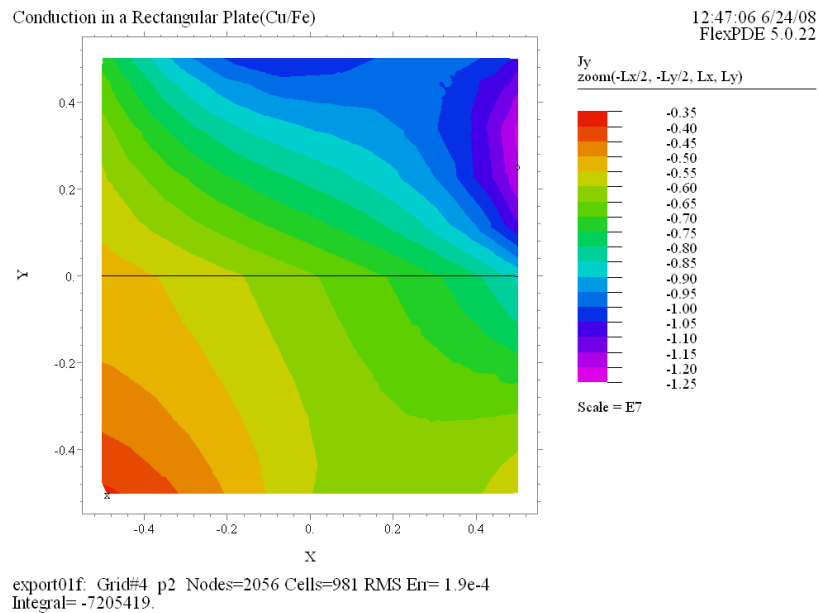
## (9) Contour(Jx) painted zoom(-Lx/2, -Ly/2, Lx, Ly)

電流密度ベクトル  $J$  の  $x$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。 $E_x$  の場合と異なり、 $J_x$  の値は材質境界をはさんで不連続となります。



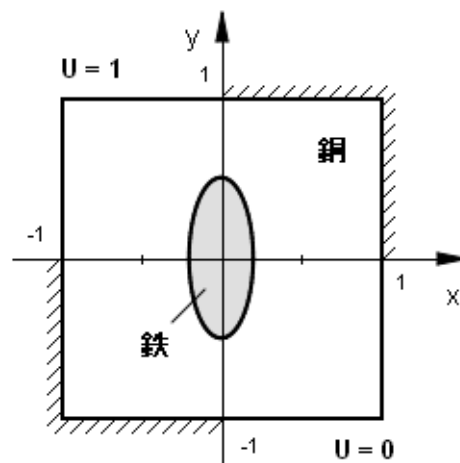
(10) Contour( $J_y$ ) painted zoom( $-L_x/2, -L_y/2, L_x, L_y$ )

電流密度ベクトル  $J$  の  $y$  成分の値に関する塗りつぶしを施した等高線図です。  $E_y$  の場合と異なり、  $J_y$  の値は材質境界をはさんで連続的に変化します。



## 7 Case6 - 楕円形の異質物を含む矩形プレート

今度は右図のような楕円形の異質物を含む銅製のプレートについて考えます。この楕円部分は鉄製とします。境界条件は Case5 の場合と同一で、ハッチングを施した部分は絶縁境界、またプレートの左上隅には  $U = 1$  の電位をかけ、右下隅の電位は  $U = 0$  に保つものとしします。



## 7.1 Problem descriptor [ econduction01g.pde ]

Case5 で作成したスクリプト econduction01f.pde のマイナーな変更で済むため、変更部分のみを記すに留めます。

### TITLE

```
'Conduction in a Plate with an Elliptical Insert' { econduction01g.pde }
```

BOUNDARIES セクション中の Region 'iron' の定義を変更します。楕円の設定にも Arc コマンドを使用しますが、通過点の明示が必要になります。長軸、短軸は  $x$  軸、 $y$  軸に平行であることが前提となります。

### BOUNDARIES

```
...
Region 'iron' cond = 1.03e7 { Iron region }
  Start (Lx/5, 0)
    Arc(Center = 0,0) to (0, Ly/2) to (-Lx/5, 0) to (0, -Ly/2) to Close
```

### PLOTS

```
Grid(x, y)
Contour(U)
Vector(J) norm
Contour(J.angle)
Contour(J.angle) on 'iron'
```

### END

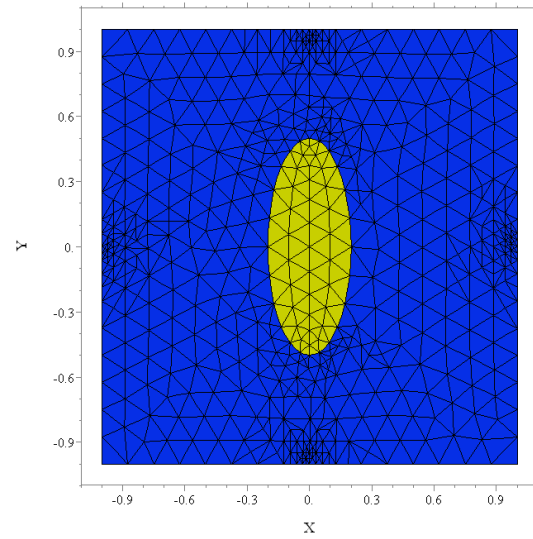
## 7.2 実行結果

(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって設定されたメッシュ構成は次のようになります。

Conduction in a Plate with an Elliptical Insert

15:34:25 6/24/08  
FlexPDE 5.0.22



x, y

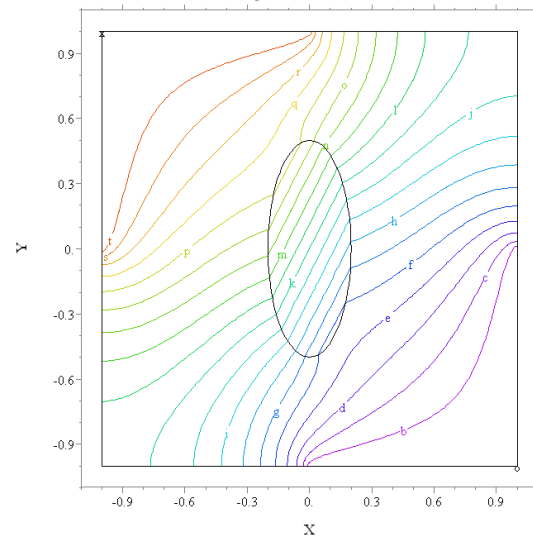
export01g: Grid#3 p2 Nodes=2167 Cells=1038 RMS Err= 1.9e-4

(2) Contour(U)

解析対象領域(ドメイン)上での関数  $U(x, y)$  の等高線図、すなわち等電位線は次のようになります。リージョン'iron'上では等電位線がほぼ平行になっています。

Conduction in a Plate with an Elliptical Insert

15:34:25 6/24/08  
FlexPDE 5.0.22

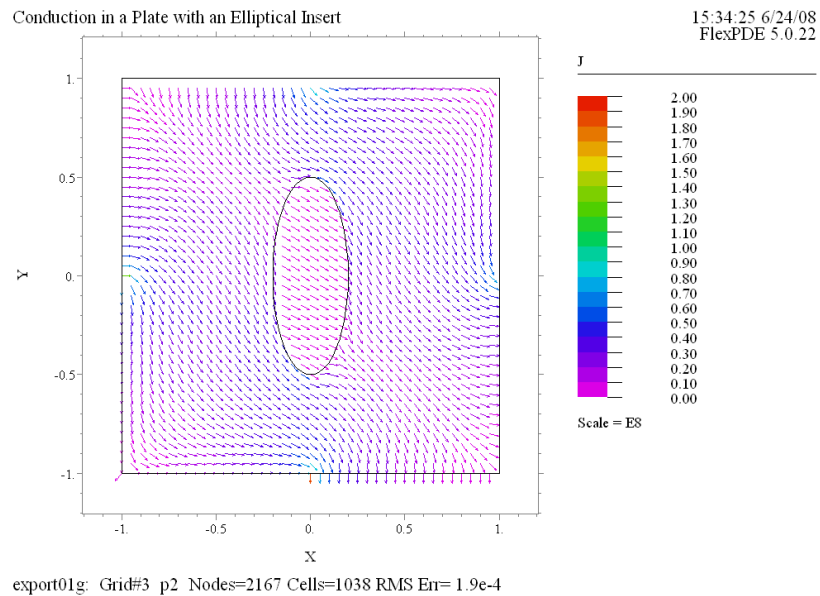


U	
max	1.00
u :	1.00
t :	0.95
s :	0.90
r :	0.85
q :	0.80
p :	0.75
o :	0.70
n :	0.65
m :	0.60
l :	0.55
k :	0.50
j :	0.45
i :	0.40
h :	0.35
g :	0.30
f :	0.25
e :	0.20
d :	0.15
c :	0.10
b :	0.05
a :	0.00
min	0.00

export01g: Grid#3 p2 Nodes=2167 Cells=1038 RMS Err= 1.9e-4  
Integral= 1.999996

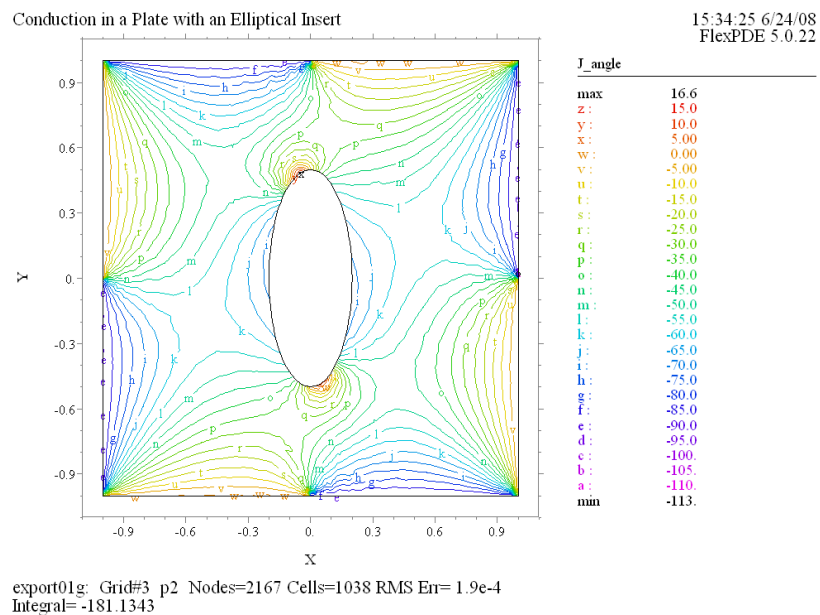
## (3) Vector(J) norm

電流密度ベクトル  $J$  のベクトル場の様子をプロットしたものです。  $U$  の等高線とは直交する流れとなっています。



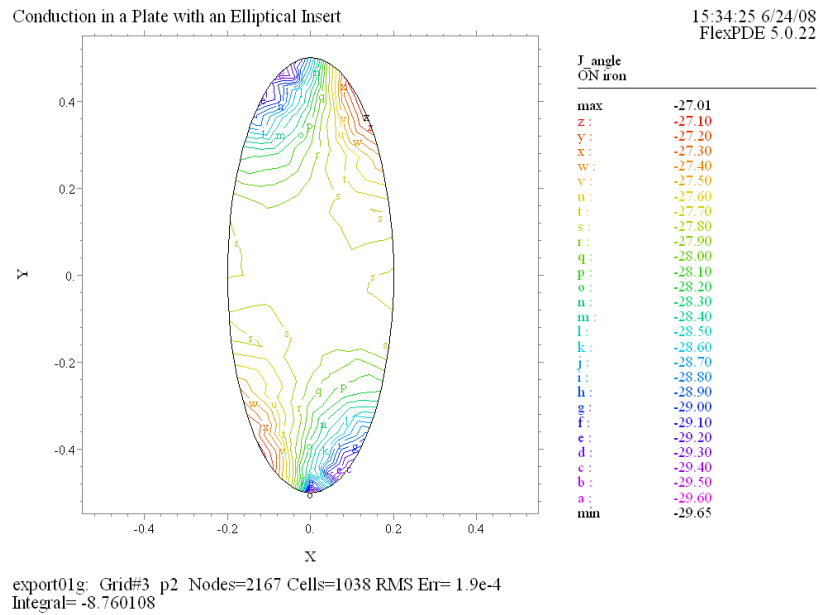
## (4) Contour(J\_angle)

電流密度ベクトル  $J$  の偏角の値に関する等高線図です。リージョン'iron' 上では偏角がほぼ一定のため、等高線が欠落してしまっています。



## (5) Contour(J\_angle) on 'iron'

(4)と同じ $J$ の偏角の値をリージョン'iron'上に限定してプロットしたものです。最大値、最小値の範囲が狭められるため、細かい変化が見てとれるようになります。いずれにせよこのリージョン内ではほぼ $-28^\circ$ という一定値になっていることがわかります。



## 参考文献

- [1] Cheng, D. K. *Field and Wave Electromagnetics, 2nd edn*, Addison-Wesley, 1989

■