

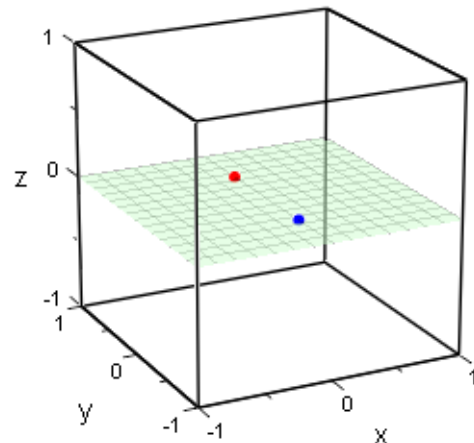
## GB009: 3次元の電場

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

FlexPDE で 3 次元の場を扱う場合には、 $x-y$  平面に定義された base plane を  $z$  軸方向に押出す (extrusion) という考え方が基本になります。

## 1 Case1 - 電荷周辺の電場 (2 電荷の場合)

右の図は電場の様子を調べようとする 3 次元空間中の立方体ドメインを示しています。Base plane である  $x-y$  平面上には  $(0, 0.5)$  の位置に  $+q$  の電荷 (赤の点) が、 $(0, -0.5)$  の位置に  $-q$  の電荷 (青の点) が置かれているものとし ( $q = 1e-10$  クーロン)、このときの周囲の電場を FlexPDE で計算します。この場合、静電ポテンシャル  $U$  を与える数式は明示的な形で与えることができるため (数式 (1) 参照)、偏微分方程式を解くというプロセスは伴いません。



点  $(x_0, y_0, z_0)$  に電荷  $q$  が置かれているときの静電ポテンシャル  $U$  を与える数式：

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (1)$$

## 1.1 Problem descriptor [ 3dfields1a.pde ]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
  'Two Point Charges of Different Signs'    { 3dfields1a.pde }
```

次に座標系が 3 次元直交座標系であることを明示します ( デフォルトは Cartesian2 )。

```
COORDINATES
  Cartesian3
```

関連する数式を定義します。静電ポテンシャル  $U$  を規定する数式も EQUATIONS セクションではなく DEFINITIONS セクション内で定義することになる点に注意してください。

```
DEFINITIONS
  L = 1.0  d0 = 0.5  q = 1e-10
  eps0 = 8.85e-12
  c = 1/(4*PI*eps0)
  U = -q*c/sqrt(x^2+(y+d0)^2+z^2) + q*c/sqrt(x^2+(y-d0)^2+z^2)
                                     { Electrostatic potential }
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  Ez = -dz(U)  { Field components }
  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
  div_xy = dx(Ex) + dy(Ey)
```

$z$  軸方向への extrusion を定義します。下から順に境界面 (Surface) とそれらにはさまれた層 (Layer) を規定して行きます。今回の例では空間の属性が  $z$  軸方向で変化するわけではないのでレイヤの定義は必要ありません。

```
EXTRUSION    { Extrude a cube through the (x, y) plane }
  Surface 'bottom' z = -L  { Limiting surfaces }
  Surface 'top' z = L
```

次に base plane 上で 1 辺が 2 の正方形ドメインを定義します。今回の例では base plane 上の 2 次元ドメインが一様な形で  $-1 \leq z \leq 1$  の範囲に extrude されて行く形となります。

```
BOUNDARIES
  Region 1
  Start(-L, -L)          { Trace outer boundary of base plane }
  Line to (L, -L) to (L, L) to (-L, L) to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

#### PLOTS

```

Grid(x, y, z)
Contour(U) painted on z = 0
Contour(U) painted on z = 0.3
Contour(U) painted on z = 1.0
Vector(E) norm on z = 0
Vector(E) norm on z = 1.0
Elevation(Ex, Ey, Ez) from (0, -L, 1) to (0, L, 1)
Contour(Ez) painted on z = 1.0 Report(Val(Ez, 0, 0.84, 1))
Contour(div_xy) on z = 1.0
Contour(div(E)) on z = 1.0

```

END

## 1.2 実行結果

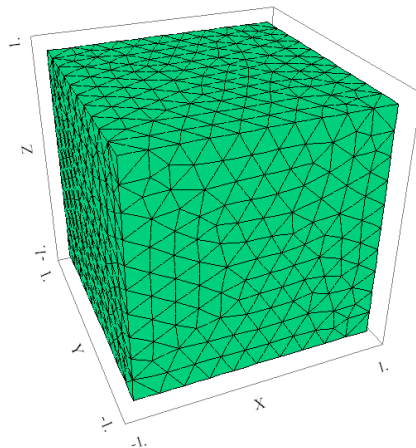
(1) Grid(x, y, z)

FlexPDE によって生成された 3 次元のメッシュ構成を示しています。

Two Point Charges of Different Signs

14:01:31 8/28/08  
FlexPDE 5.1.0

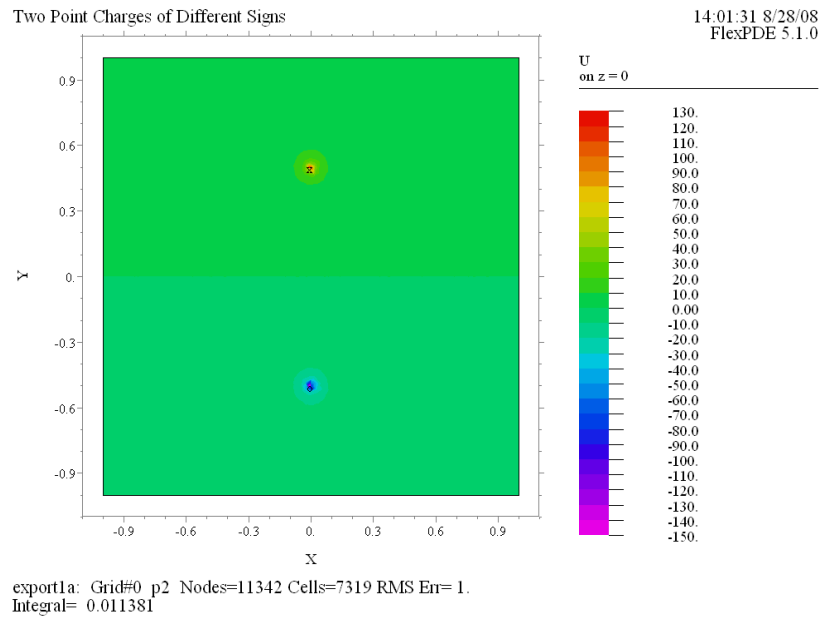
x, y, z  
(-3.98, -9.6, 30.)



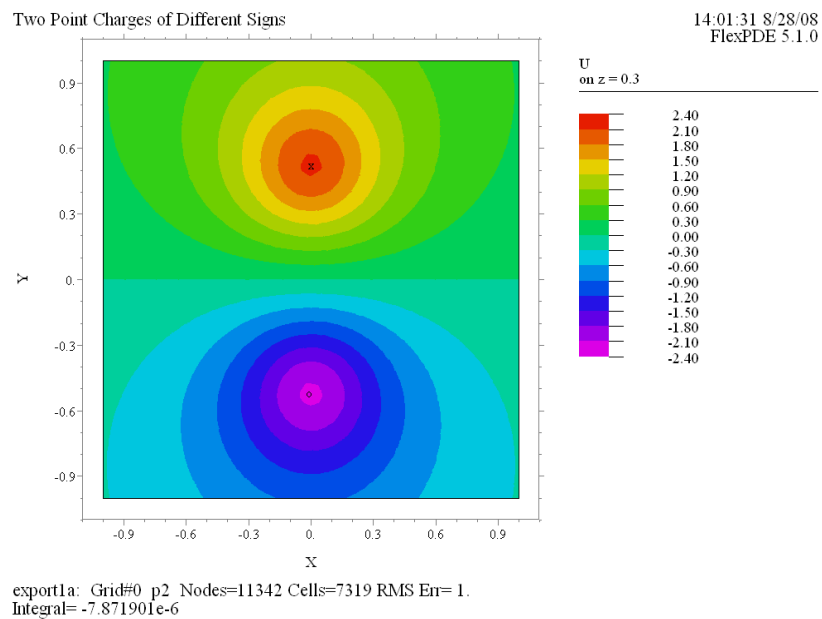
export1a: Grid#0 p2 Nodes=11342 Cells=7319 RMS Err=1.

(2) Contour(U) painted on  $z = 0$ 

平面  $z = 0$  上におけるポテンシャル  $U$  の等高線図です。 $(0, 0.5, 0)$ ,  $(0, -0.5, 0)$  において  $U$  の理論値は無限大となるため、等高線図といっても曲線が極の周囲に局在する結果となっています。

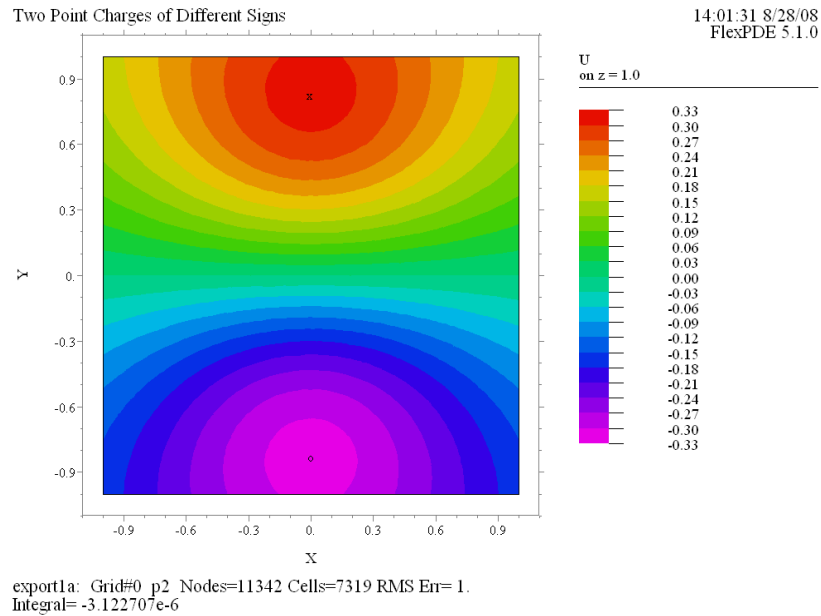
(3) Contour(U) painted on  $z = 0.3$ 

$z = 0.3$  という平面上には極は存在せず、 $U$  の値の範囲も限られたものとなるため、等高線図の形状も穏当なものとなっています。

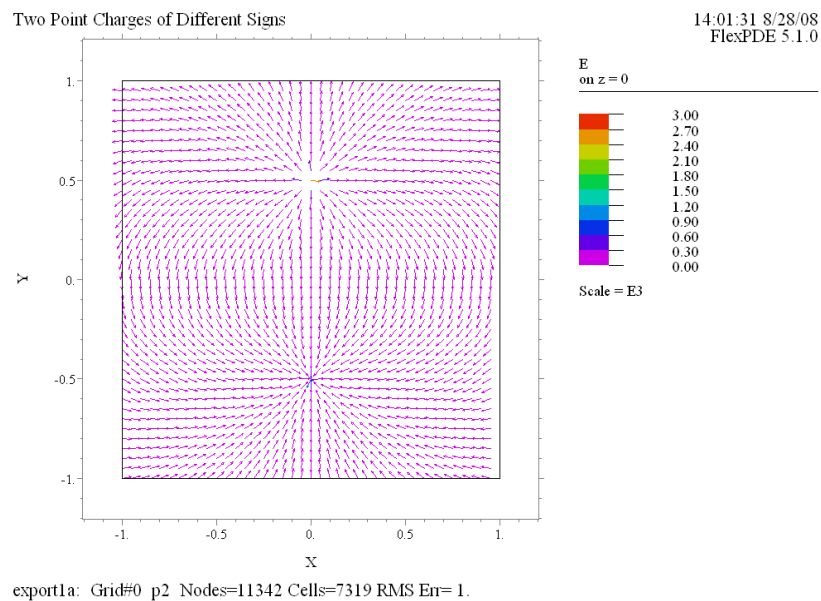


(4) Contour(U) painted on  $z = 1.0$ 

プロット (3) に比べると電荷の位置からさらに離れるため、曲面の形状はよりなだらかなものとなっています。

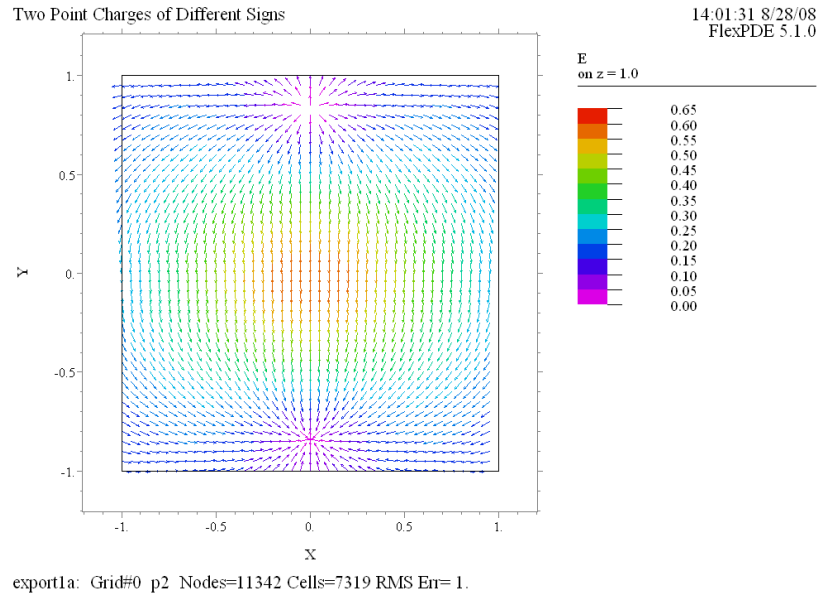
(5) Vector(E) norm on  $z = 0$ 

平面  $z = 0$  上における電場  $E$  のベクトルプロットを示したものです。norm を指定しているため、場の強さはカラーによって表現されるのですが、ここでも極の存在によってモノトーンなプロットとなってしまっています。

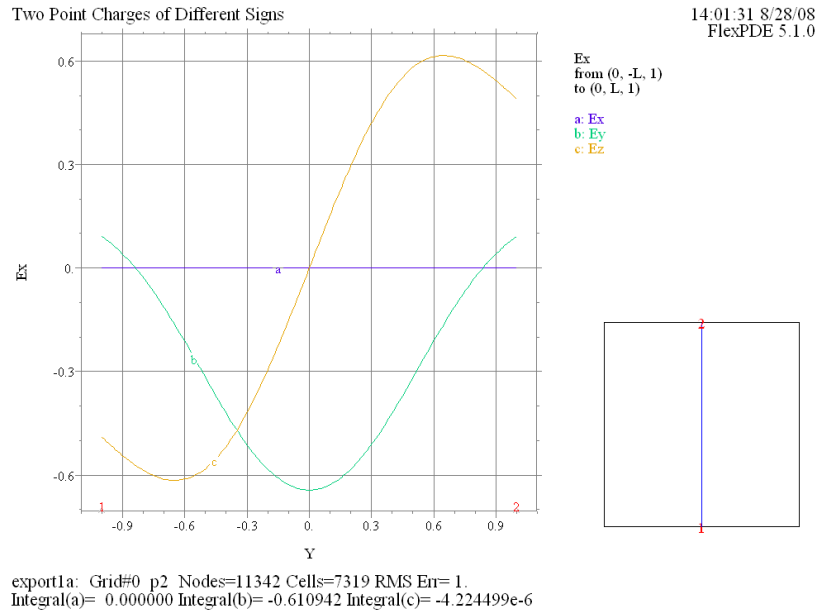


(6) Vector(E) norm on  $z = 1.0$ 

平面  $z = 1$  上での電場  $E$  に関するベクトルプロットです。 $(0, 0.84, 1)$  の近傍に湧き出し口が、 $(0, -0.84, 1)$  の近傍に吸い込み口があるように見えます。0.84 という値については次の elevation プロットを参照してください。

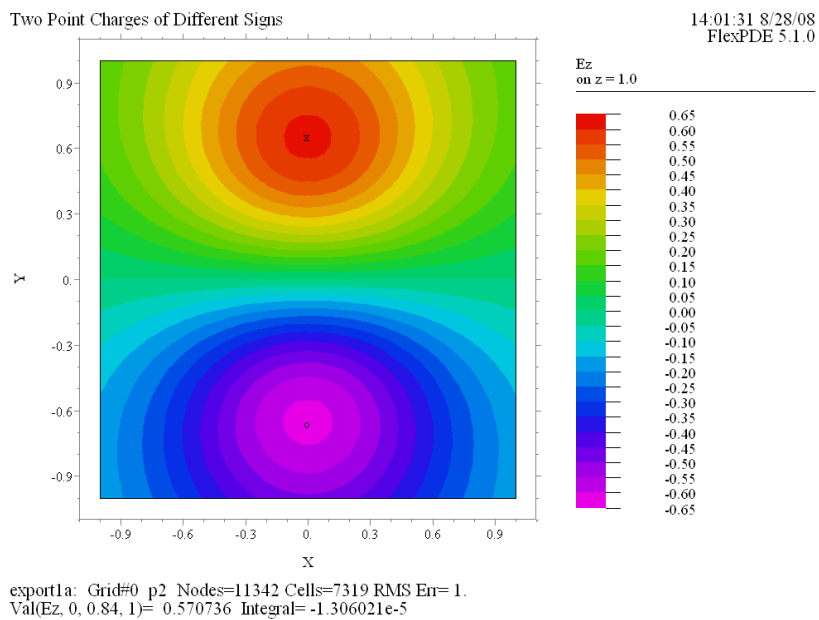
(7) Elevation( $E_x, E_y, E_z$ ) from  $(0, -L, 1)$  to  $(0, L, 1)$ 

これは直線  $(0, y, 1)$  上における  $E_x, E_y, E_z$  の変化をプロットしたものです。 $E_x$  はどの場所でも 0 ですが、 $E_y$  は  $y = \pm 0.84$  の位置で 0 となっています。つまり  $(0, 0.84, 1), (0, -0.84, 1)$  の 2 点では  $E_x = E_y = 0$  となっているわけです。ただしこれらの点において  $E_z$  は 0 ではない点に注意してください。



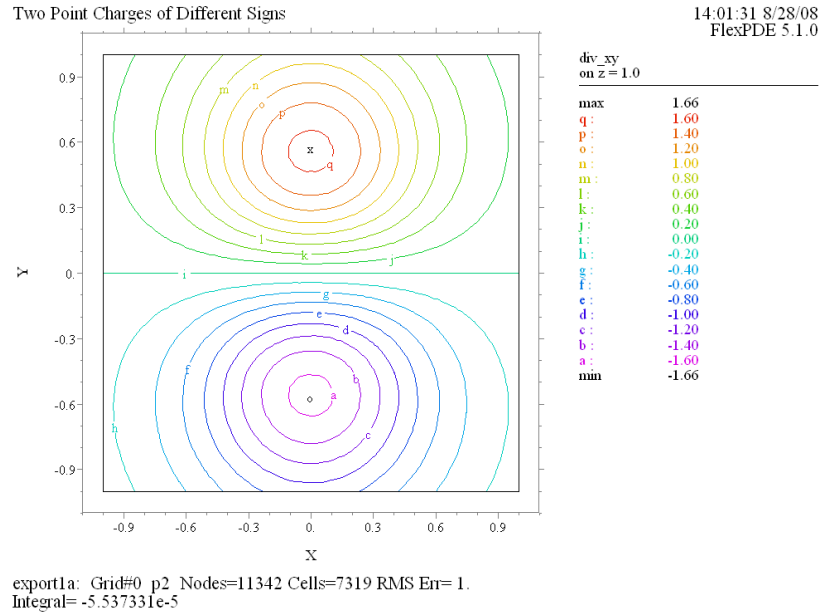
(8) Contour(Ez) painted on  $z = 1.0$  Report(Val(Ez, 0, 0.84, 1))

平面  $z = 1$  上での  $E_z$  に関する等高線図です。グラフよりも Report 文の出力に注意してください。(0, 0.84, 1) の点における  $E_z$  の値が 0.57 であることがわかります。

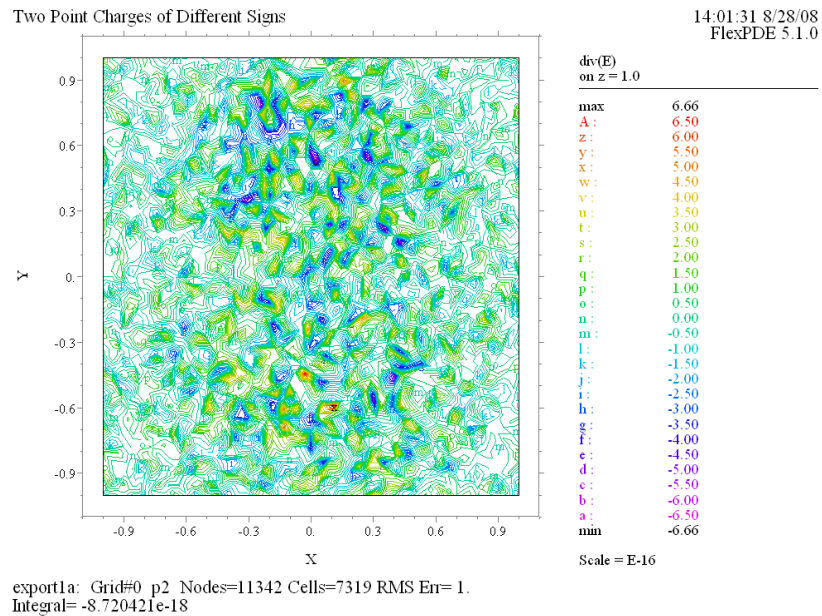


(9) Contour(div\_xy) on  $z = 1.0$ 

平面  $z = 1$  上における  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$  の値の等高線図です。これは 0 にはなりません。

(10) Contour(div(E)) on  $z = 1.0$ 

一方、平面  $z = 1$  上における  $\text{div}(E) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  の値は至るところ 0 となります。

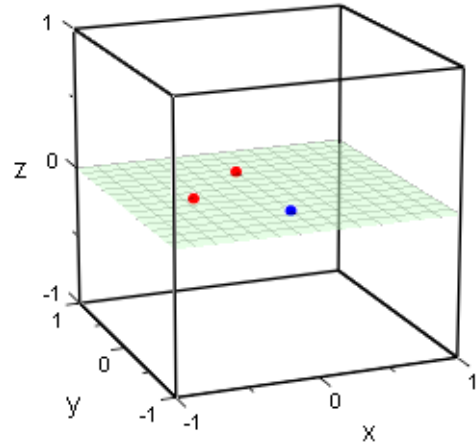




## 2 Case2 - 電荷周辺の電場 (3 電荷の場合)

今度は  $x$ - $y$  平面上に 3 つの電荷が置かれているケースを考えます。具体的には  $(0, 0.5)$ ,  $(-0.5, 0)$  の 2 点に  $+q$  の電荷 (赤の点)、 $(0, -0.5)$  の点に  $-q$  の電荷 (青の点) が置かれているものとします (ただし  $q = 1e-10$  クーロン)。

今回の場合もポテンシャル  $U$  に対する数式は明示的に規定されるため、偏微分方程式を解くというプロセスは伴いません。



### 2.1 Problem descriptor [ 3dfields1b.pde ]

Case1 で作成したスクリプト 3dfields1a.pde に対する変分のみを記すに留めます。

```
TITLE
  'Three Point Charges'    { 3dfields1b.pde }
```

DEFINITIONS の部分は  $U$  に対する定義式のみが変わります。

```
DEFINITIONS
  ...
  U = -q*c/sqrt(x^2+(y+d0)^2+z^2) + q*c/sqrt(x^2+(y-d0)^2+z^2)
      + q*c/sqrt((x+d0)^2+y^2+z^2)
  ...
```

EXTRUSION, BOUNDARIES の部分に変更はありません。PLOTS の指定は次のようにします。

#### PLOTS

```

Contour(U) painted on z = 0
Contour(max(min(U, 10), -10)) on z = 0
Contour(U) painted on z = 0.3
Contour(U) painted on x = 0
Contour(U) painted on y = 0
Contour(U) painted on z = 1.0
Contour(U) painted on y = x
Vector(E) norm on z = 0
Vector(E) norm on z = 0.3
Contour(Em) painted on z = 0.3

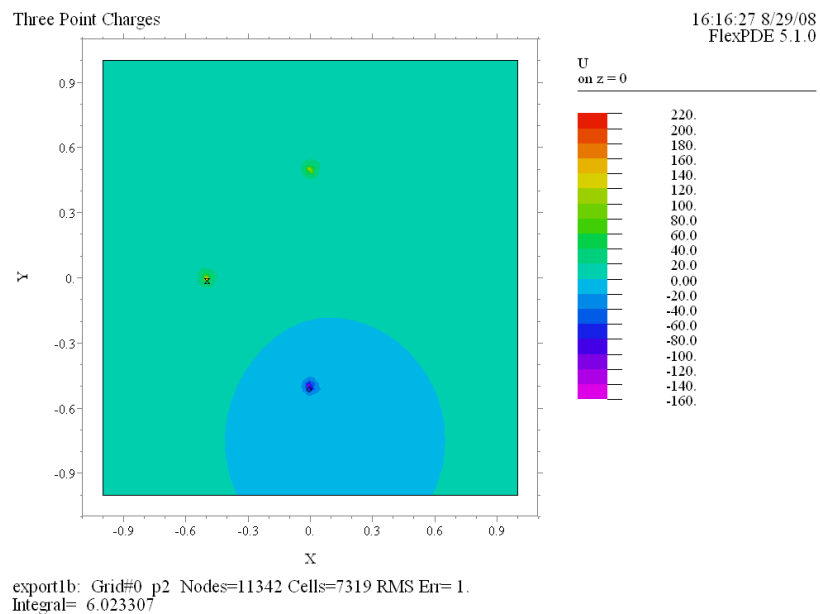
```

END

## 2.2 実行結果

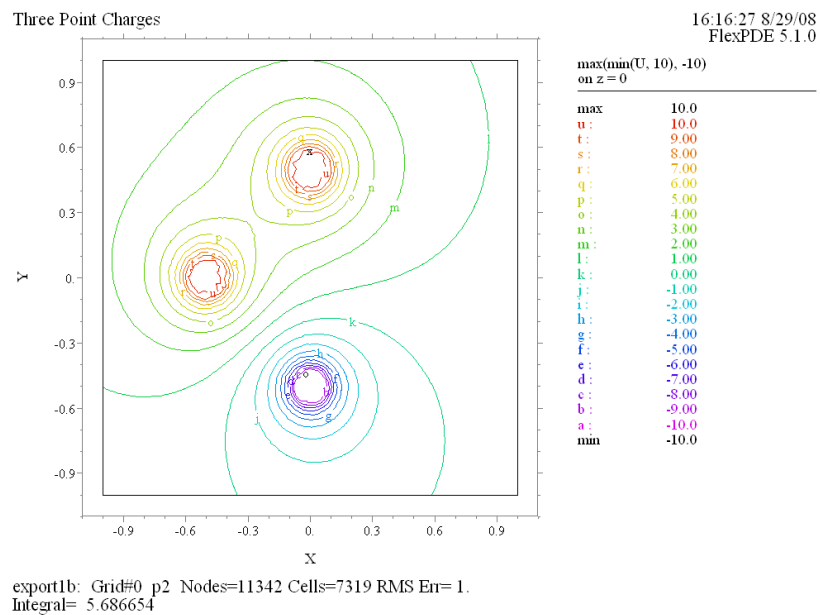
### (1) Contour(U) painted on z = 0

平面  $z = 0$  上でポテンシャル  $U$  の等高線図を描いたものです。極の存在により、電荷周辺における曲面の形状変化は全くかき消されてしまっています。



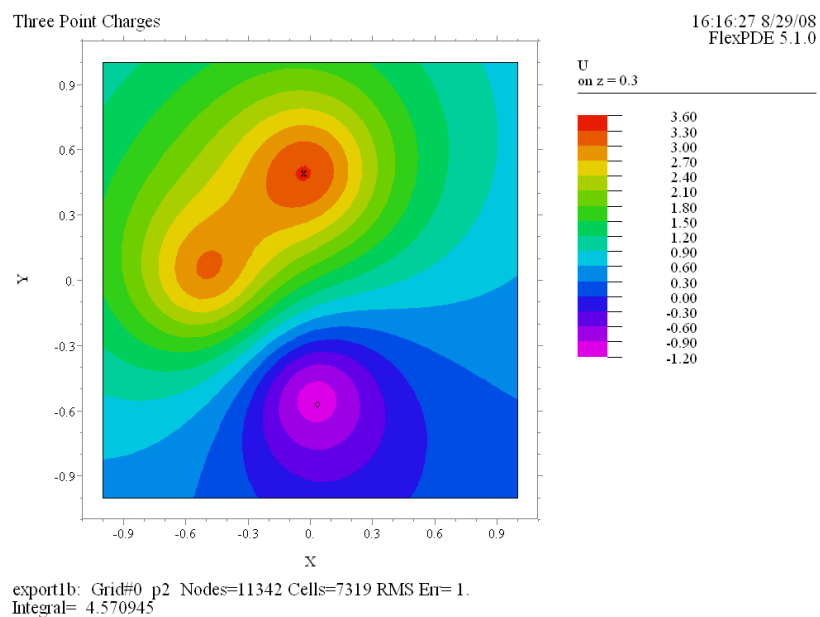
## (2) Contour(max(min(U, 10), -10)) on z = 0

$U$  の絶対値に対し意図的にフィルタリングをかけることにより、電荷周囲での曲面の形状をグラフ化することが可能になります。



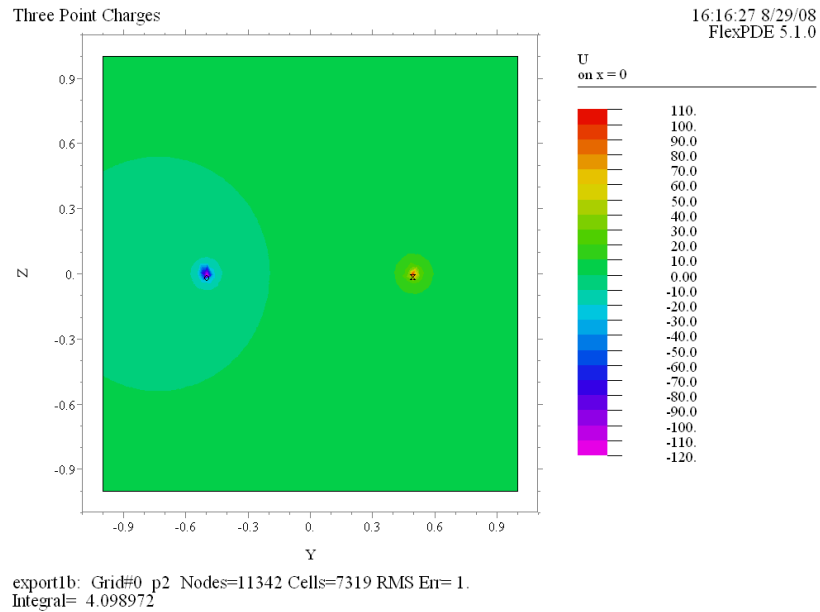
## (3) Contour(U) painted on z = 0.3

平面  $z = 0.3$  上には極は存在しないため、ポテンシャル  $U$  の等高線図は問題なく作成できます。

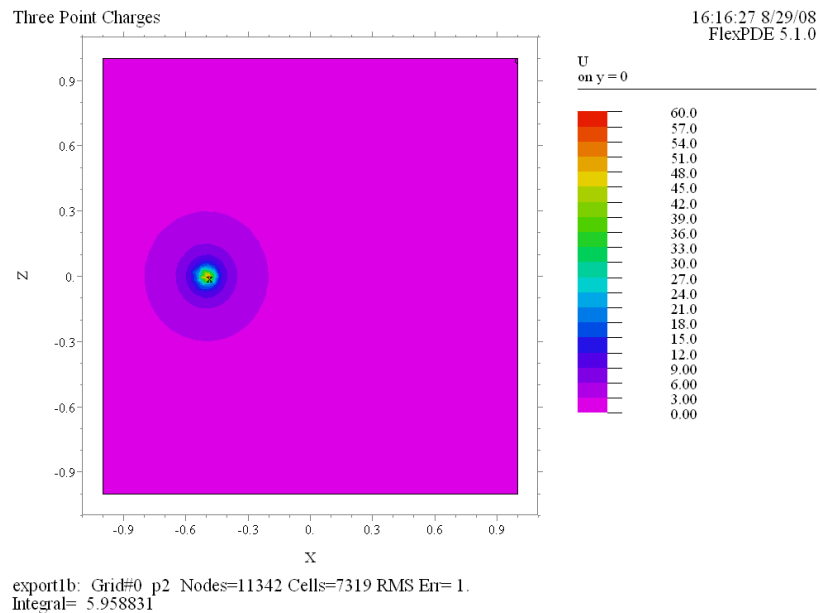


(4) Contour(U) painted on  $x = 0$ 

$y$ - $z$  平面上でポテンシャル  $U$  の等高線図を描いたものです。横方向に  $y$  軸、縦方向に  $z$  軸が取られている点に注意してください。この平面上にも極が2つ存在するため、曲面の形状変化を見るためにはフィルタリング操作が必要になります。

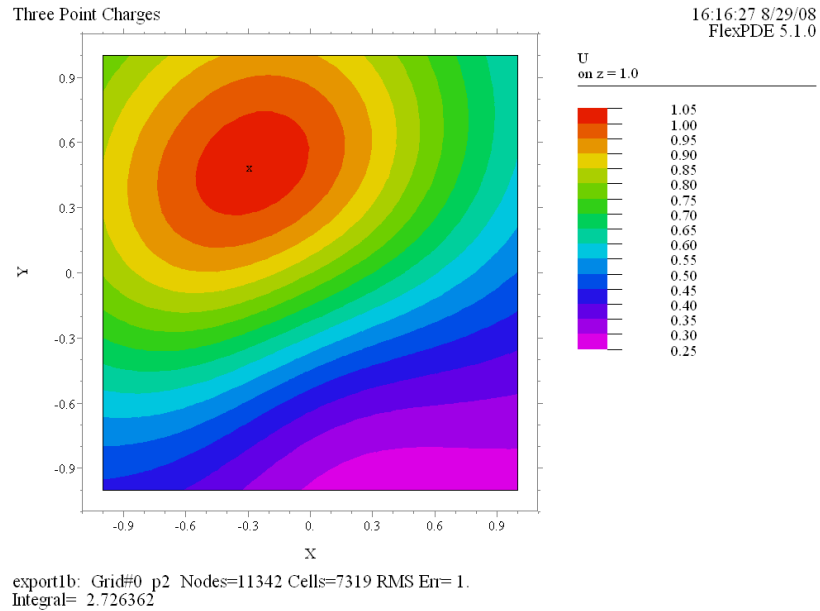
(5) Contour(U) painted on  $y = 0$ 

$x$ - $z$  平面上でポテンシャル  $U$  の等高線図を描いたものです。この場合も  $(-0.5, 0)$  の位置に極が存在します。

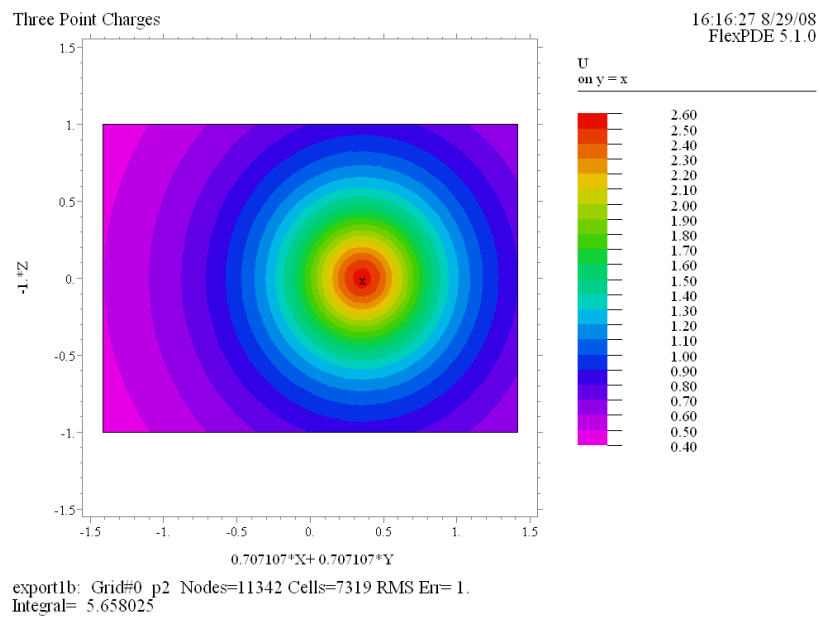


(6) Contour(U) painted on  $z = 1.0$ 

平面  $z = 1$  上でポテンシャル  $U$  の等高線図を描いたものです。

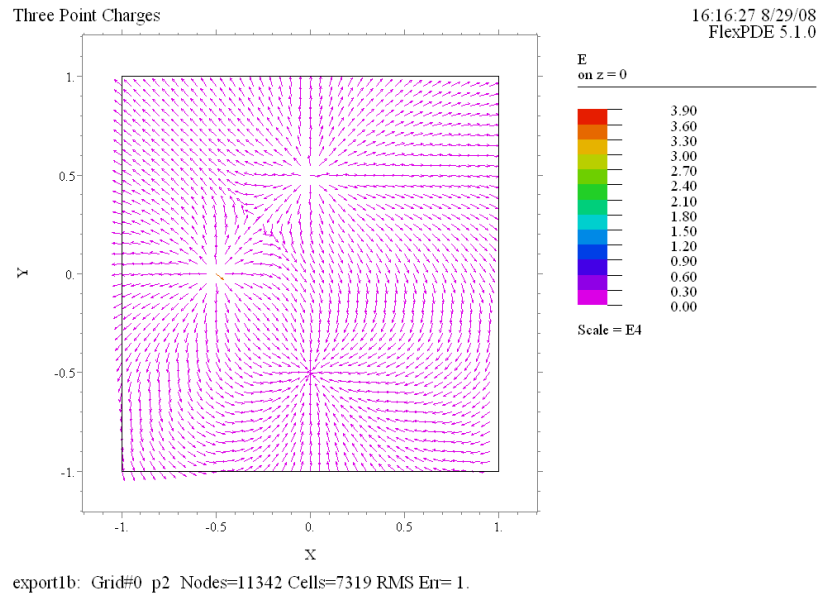
(7) Contour(U) painted on  $y = x$ 

平面  $y = x$  上で  $U$  の等高線図を描いたものです。  $y = x$  という条件のもとでは  $U$  の定義式のうち 2 項が相殺されてしまうため、等高線図が単純な形状となっています。

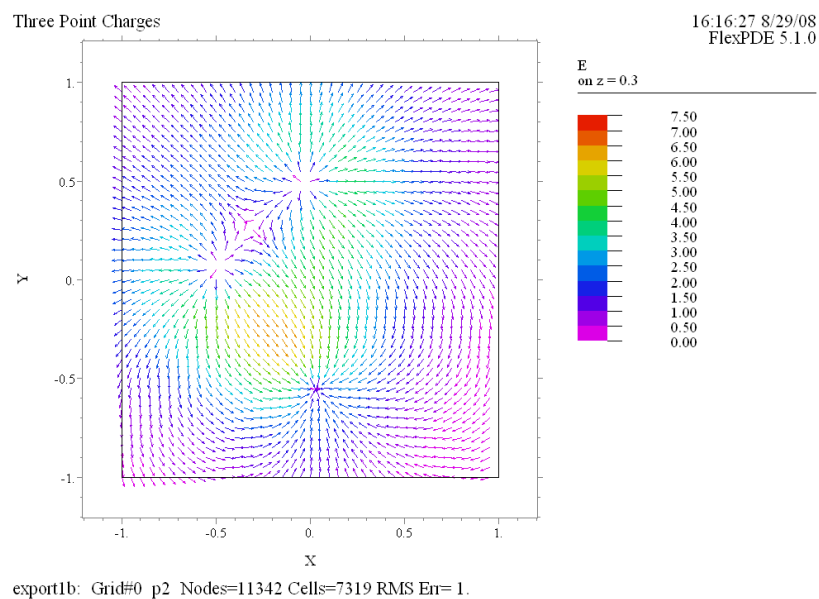


(8) Vector(E) norm on  $z = 0$ 

平面  $z = 0$  上における電場  $E$  のベクトルプロットを示したものです。norm を指定しているため、場の強さはカラーによって表現されるのですが、ここでも極の存在によってモノトーンなプロットとなってしまっています。

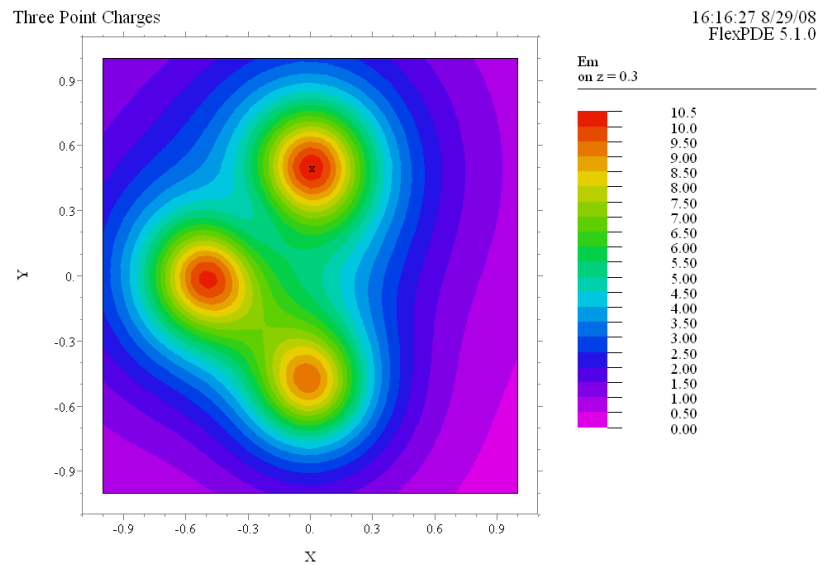
(9) Vector(E) norm on  $z = 0.3$ 

平面  $z = 0.3$  上における電場  $E$  のベクトルプロットです。プロット (8) とパターンは大差ありませんが、平面内には極が存在しないため、ベクトル長に対応するカラースキームが有効に働いています。



(10) Contour(Em) painted on  $z = 0.3$

プロット (9) と同じ電場ベクトル  $E$  に関するプロットですが、ここでは  $|E|$  というスカラー量のみに着目し、それを等高線図の形で表現したものです。

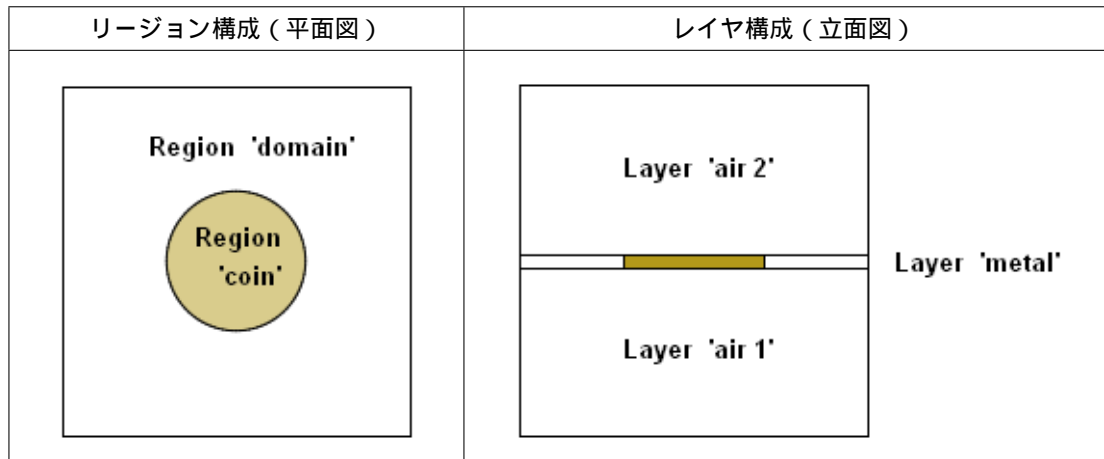
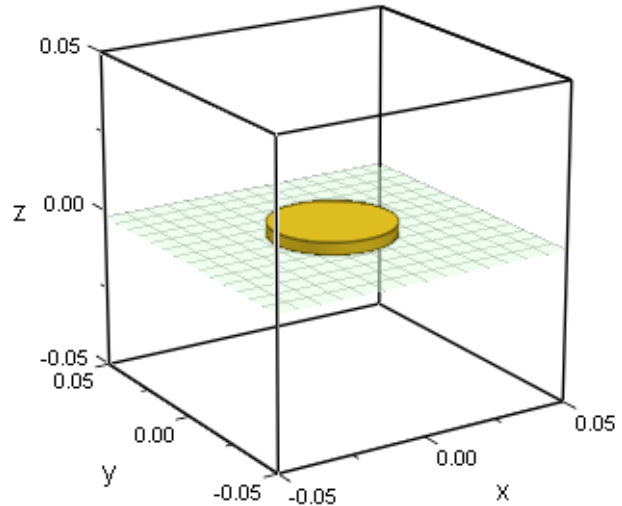


export1b: Grid#0 p2 Nodes=11342 Cells=7319 RMS Em= 1.  
Integral= 13.93756

### 3 Case3 - 金属箱中のコイン

今度は1辺が5cmの金属製の箱の中心部分に半径2cm、厚さ4mmのコインが細いナイロン糸によって吊り下げられている状態を考えます。コイン表面の電位を1Vとしたときの周囲の電場の様子を解析します。ただし外側の金属箱は電位0に保たれているものとします。

$x$ - $y$  平面上のリージョンを  $z$  軸方向に extrude する形で3次元の領域を規定して行くわけですが、その際以下のネーミングに注意してください。



#### 3.1 Problem descriptor [ 3dfields1c.pde ]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Coin in a Metal Box' { 3dfields1c.pde }
```



次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
  Errlim = 1e-3
```

座標系が 3 次元直交座標系であることを明示します ( デフォルトは Cartesian2 )、

```
COORDINATES
  Cartesian3
```

従属変数を定義します。

```
VARIABLES
  U { Electrostatic potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類や関係式を定義します。ドメインの立方体の辺の長さを  $2L(m)$ 、コインの半径を  $r_0(m)$ 、厚みを  $2d_0(m)$  としています。

```
DEFINITIONS
  L = 0.05  r0 = 0.02  d0 = 2e-3
  U0 = 1.0
  Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  Ez = -dz(U)  { Field components }
  E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
```

3 次元の静電場を表す偏微分方程式を定義します。この方程式の誘導については GB002 を参照ください。

```
EQUATIONS
  div(grad(U)) = 0
```

$z$  軸方向への extrusion を定義します。下から順に境界面 (Surface) とそれらにはさまれた層 (Layer) を規定して行きます ( 上記立面図参照 )、

```
EXTRUSION { Parallel surfaces }
  Surface 'bottom' z = -L
  Layer 'air 1' { Layer below coin }
  Surface 'lower' z = -d0
  Layer 'metal' { Layer containing coin }
  Surface 'upper' z = d0
  Layer 'air 2' { Layer above coin }
  Surface 'top' z = L
```

BOUNDARIES セクションにおいて base plane 上でのリージョン構成と境界条件を定義します（上記平面図参照）。これら base plane 上での形状定義や境界条件は基本的に  $z$  軸方向に extrude されて行きます。実際、base plane 上での外側境界上での境界条件は extrude された 3 次元オブジェクトの境界壁に対する境界条件ともなります。ただし上面と下面については Surface 文にて境界条件を明示します。なお導体であるコインの部分を計算対象からはずす (exclude) ために、リージョン 'coin' の定義中に void という修飾子を用いている点に注意してください。

```
BOUNDARIES
Surface 'bottom' Value(U) = 0
Surface 'top' Value(U) = 0

Region 'domain'           { Full solution domain }
  Start(-L, -L) Value(U) = 0 { For all four faces }
  Line to (L, -L) to (L, L) to (-L, L) to Close

Region 'coin'             { Exclude volume }
  Surface 'lower' Value(U) = U0
  Surface 'upper' Value(U) = U0
  Layer 'metal' Void
  Start (r0, 0) Layer 'metal' Value(U) = U0 { Coin }
  Arc(Center=0,0) Angle = 360 to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

```
PLOTS
Grid(x, y, z)
Contour(U) painted on z = 0
Surface(U) on z = 0
Contour(U) painted on z = 2*d0
Contour(U) painted on z = 0.5*L
Contour(U) painted on x = 0
Vector(E) norm on z = 0.5*L
Contour(Em) painted on x = 0
Vector(E) norm on x = 0
Elevation(U) from (-L, 0, d0) to (L, 0, d0)
```

```
END
```

## 3.2 実行結果

計算に先立ち、3次元ドメインを構成するリージョンやレイヤが順次表示されて行きますが、通常は一瞬のうちに消えてしまい、計算の実行が開始されてしまいます。ドメインの構成をチェックしつつ計算への移行も手動で制御したい場合には、「Controls」:「Domain Review」と操作してください。ドメインを構成する各部分領域が下から順に表示されて行きます。

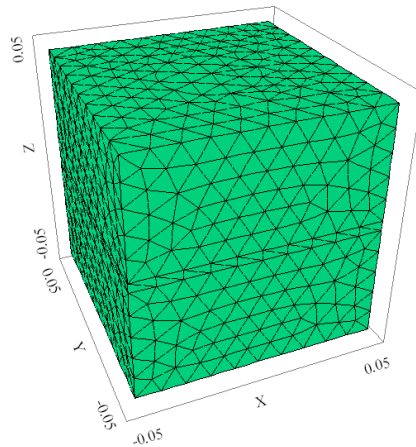
### (1) Grid(x, y, z)

FlexPDEによって生成された3次元のメッシュ構成を示しています。

Coin in a Metal Box

12:53:41 9/2/08  
FlexPDE 5.1.0

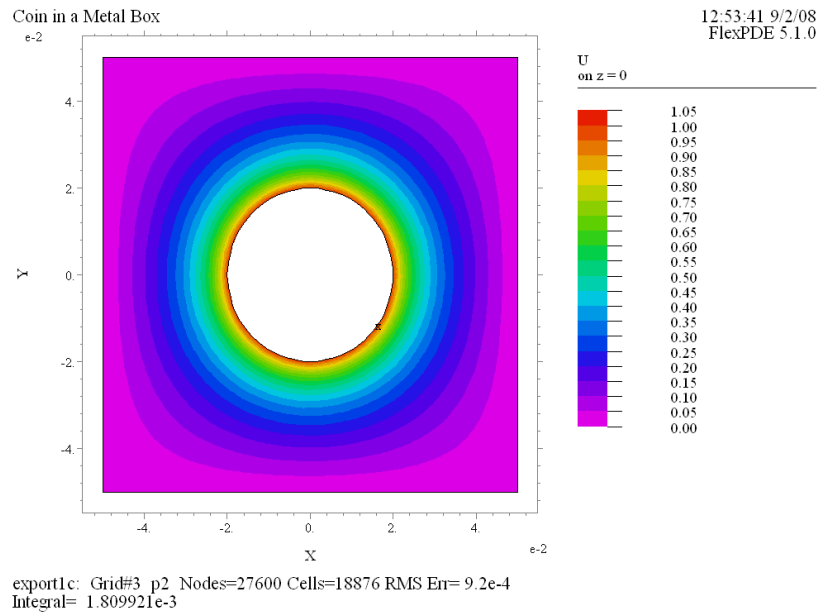
x, y, z  
(-0.2, -0.48, 30.)



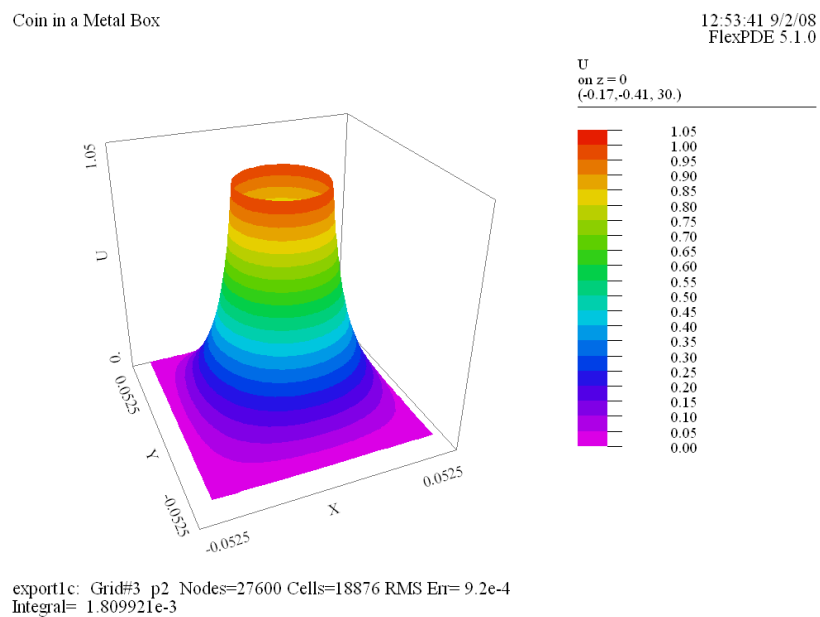
export1c: Grid#3 p2 Nodes=27600 Cells=18876 RMS Er= 9.2e-4

(2) Contour(U) painted on  $z = 0$ 

平面  $z = 0$  上における等電位線のプロットです。

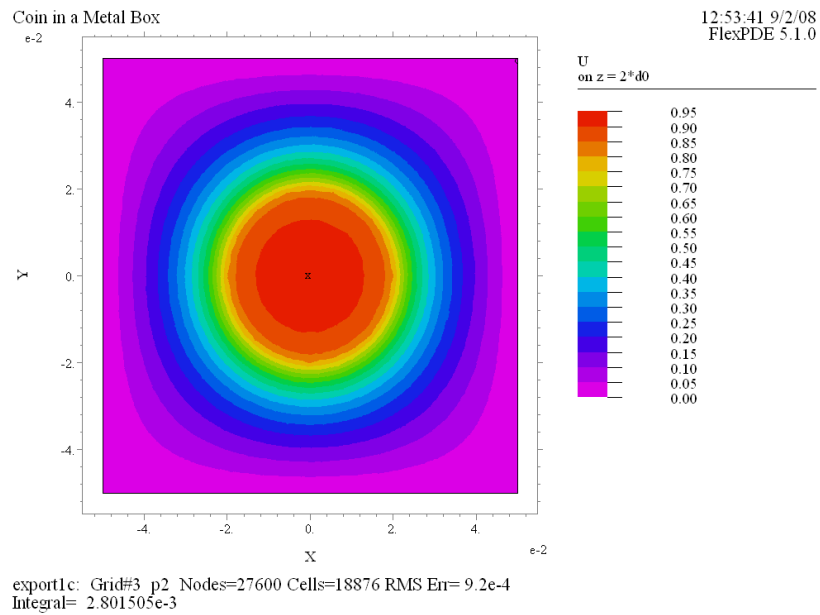
(3) Surface(U) on  $z = 0$ 

プロット (2) と同じ内容ですが、等高線図ではなく曲面図の形にしたものです。

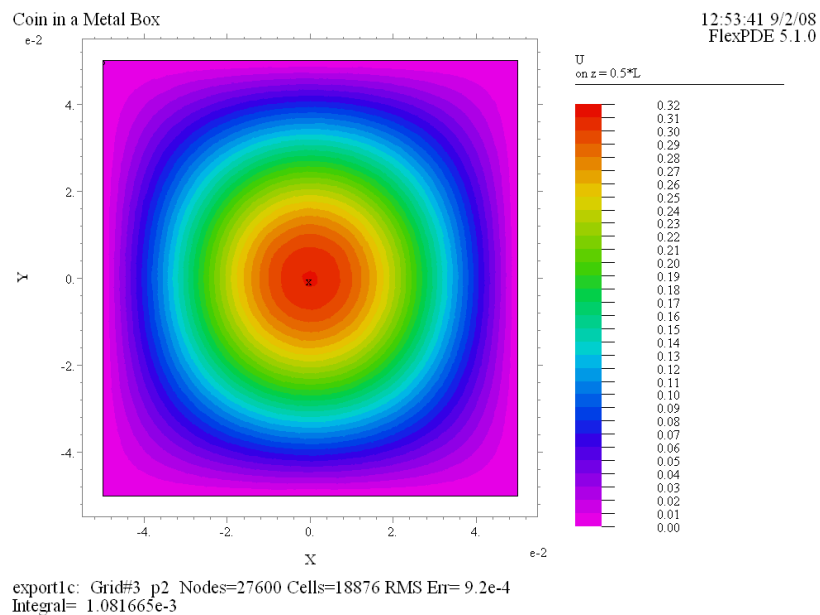


(4) Contour(U) painted on  $z = 2*d_0$ 

コインの上面は  $z = d_0$  上に位置するわけですが、次の図は  $z = 2d_0$  上での等電位線を示したものです。U の最大値は 1 をわずかに下回っています。

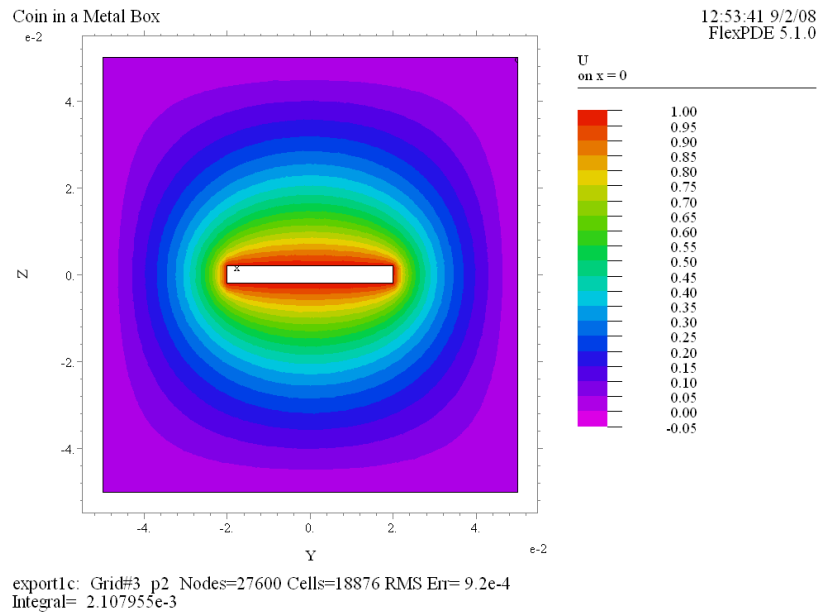
(5) Contour(U) painted on  $z = 0.5*L$ 

箱の上面と base plane  $z = 0$  との中間地点における等電位線プロットです。U の最大値は 0.32 まで下がっています。

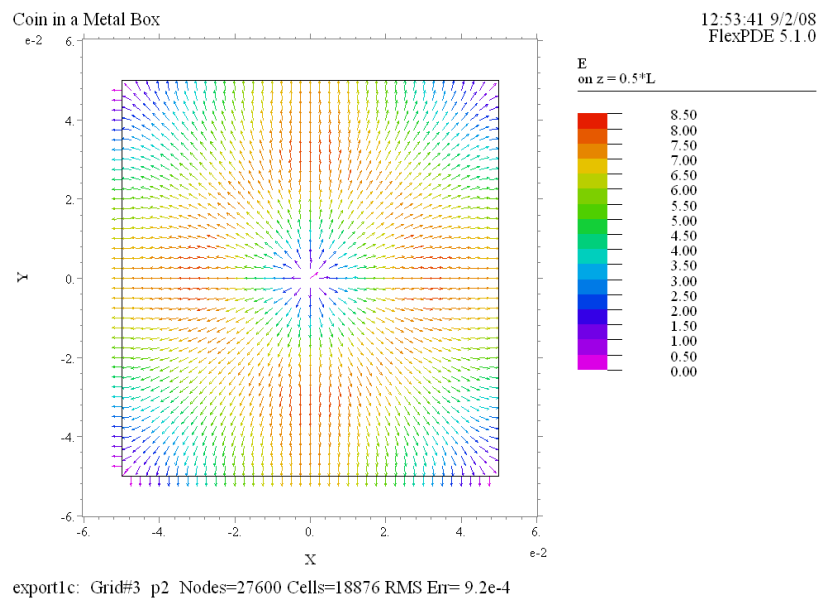


(6) Contour(U) painted on  $x = 0$ 

平面  $x = 0$  上における等電位線図です。

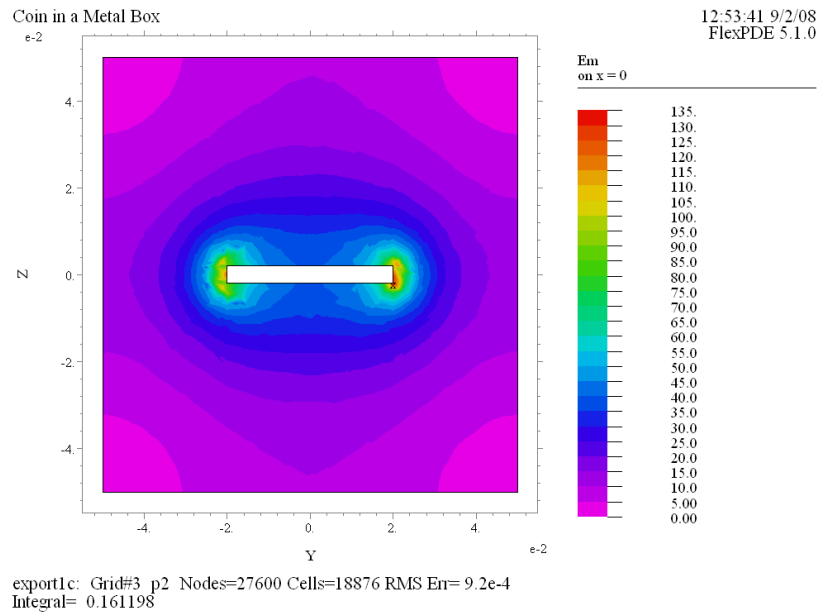
(7) Vector(E) norm on  $z = 0.5*L$ 

平面  $z = 0.5L$  上における電場  $E$  のベクトルプロットです。

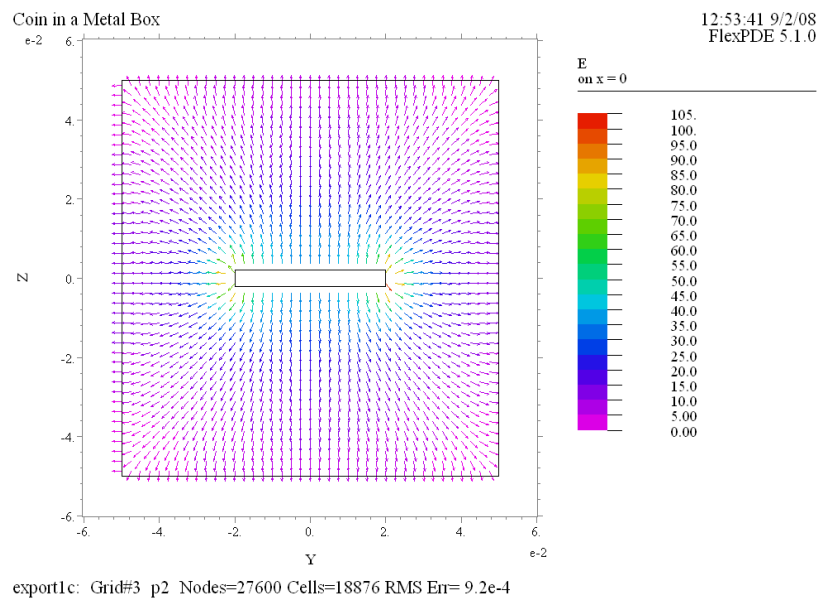


(8) Contour(Em) painted on  $x = 0$ 

平面  $x = 0$  上で電場ベクトル  $E$  の絶対値をプロットしたものです。コインの端の部分にピークが見られます。

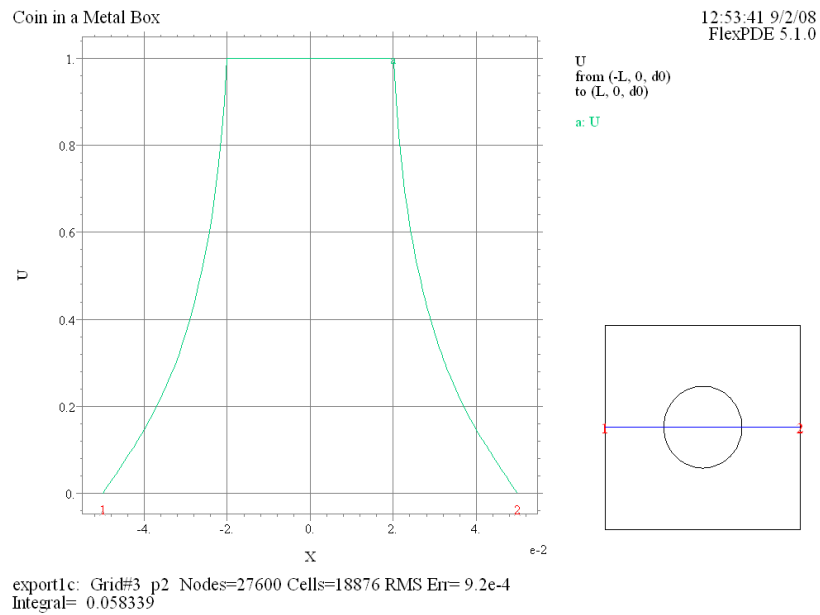
(9) Vector(E) norm on  $x = 0$ 

平面  $x = 0$  上における電場  $E$  のベクトルプロットを示したものです。



(10) Elevation( $U$ ) from  $(-L, 0, d_0)$  to  $(L, 0, d_0)$

コイン上面を含む平面  $z = d_0$  上の直線  $y = 0$  に沿って電位  $U$  の値をプロットしたものです。コイン上で1、箱の表面で0 という境界条件が満たされていることがわかります。

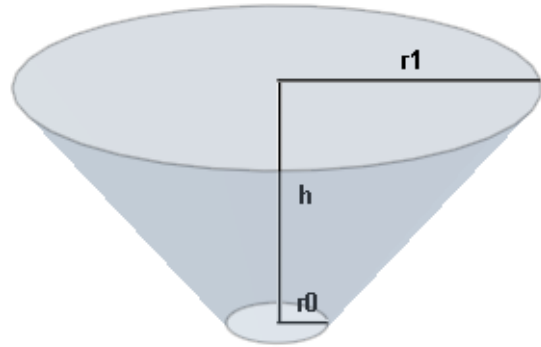




#### 4 Case4 - 円錐台中の電導

今度は右図のような円錐台の形状をしたシリコン製の物体が与えられたとします。上面に1Vの電位をかけたときの電導の様子について、FlexPDEを用いて解析を行います。その際、下面の電位は0に、周囲の斜面は絶縁状態に保たれているものとします。ただし、関連する寸法は次の通りです。

$$\begin{aligned} r_1 &= 1\text{cm} \\ r_0 &= 0.2\text{cm} \\ h &= 1\text{cm} \end{aligned}$$



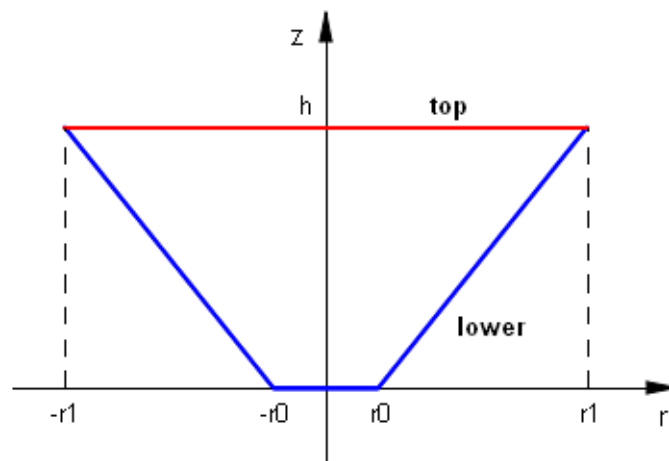
この場合も extrusion の考え方で3次元オブジェクトの定義を行うわけですが、その場合、下面 lower (下図で青の部分) の設定が少々わかりにくいかも知れません。円柱座標系で動径の長さを  $r$  としたとき、斜面を規定する方程式は

$$z = \frac{h}{r_1 - r_0}(r - r_0)$$

従って lower という面全体で言えば

$$z = \max\left(0, \frac{h}{r_1 - r_0}(r - r_0)\right)$$

という数式で定義できる点にご注意ください。



#### 4.1 Problem descriptor [ 3dfields1d.pde ]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Electrical Conduction in a Cone'    { 3dfields1d.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
Errlim = 1e-3
```

座標系が 3 次元直交座標系であることを明示します ( デフォルトは Cartesian2 )。

```
COORDINATES
Cartesian3
```

従属変数を定義します。

```
VARIABLES
U                                     { Electric potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類や関係式を定義します。本ケースでは電流を伴うため、電流密度ベクトル  $J$  の規定が必要となります。背景情報については GB003 を参照ください。

```
DEFINITIONS
r0 = 2e-3  r1 = 10e-3  h = 10e-3
cond = 1.0e-3                                     { Conductivity of silicon }
Ex = -dx(U)  Ey = -dy(U)  Ez = -dz(U)
E = -grad(U)  Em = magnitude(E)
Jx = cond*Ex  Jy = cond*Ey  Jz = cond*Ez
J = cond*E  Jm = magnitude(J)
rad = sqrt(x^2 + y^2)                             { Radius }
power = Vol_Integral(Jm*Em)                       { Dissipation }
current = Surf_Integral(normal(J), 'top')
```

3 次元の電導を表す偏微分方程式を定義します。背景情報については GB003 を参照ください。

```
EQUATIONS
div(J) = 0
```

$z$  軸方向への extrusion を定義します。実際には下面と上面の定義があるのみなので、その間の空間の特性は一樣となります。なお、面 'lower' の定義文中で使われている rad というのは DEFINITIONS セクションで定義されている通り、円柱座標系での動径  $r$  を意味します。

#### EXTRUSION

```
Surface 'lower' z = max(0, h*(rad-r0)/(r1-r0))
                                     { Flat base plus cone }
Surface 'top' z = h                   { Flat upper surface }
```

BOUNDARIES セクションにおいて base plane 上でのリージョン構成定義と境界条件の設定を行います。Base plane がこの場合平面ではないため、やや変則的です。また半径が  $r_0$  の円形リージョンを定義していますが、これは下面 'lower' 内でこの部分のみ境界条件が異なるためです。

#### BOUNDARIES

```
Surface 'top' Value(U) = 1.0         { 1 volt applied on top }

Region 'domain'                      { Total domain }
Surface 'lower' Natural(U) = 0      { dU/dn=0 on cone }
Start(r1, 0) Arc(Center=0,0) Angle = 360 to Close
                                     { Extension in (x, y) }

Region 'cylinder'                    { Overwrites total }
Surface 'lower' Value(U) = 0        { Lower flat face }
Start (r0, 0) Arc(Center=0,0) Angle = 360 to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

#### PLOTS

```
Grid(x, y, z) Report(power) Report(current)
Contour(U) on x = 0
Vector(J) norm on x = 0
Elevation(tangential(E))
Line_Integrate from (0, r1/2, h) to (0, 0, 0) { Voltage }
```

#### END

## 4.2 実行結果

(1) Grid(x, y, z) Report(power) Report(current)

FlexPDE によって生成された 3 次元のメッシュ構成を示しています。Report 文によって

$$I_1 = \int_V |\mathbf{J}| \cdot |\mathbf{E}| dV$$

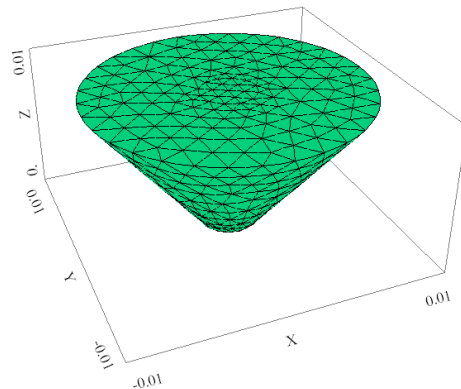
$$I_2 = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

という 2 つの積分値が出力されている点に注意ください ( $S$  は電位のかかっている上面 ('top') を意味しています)。  $I_1$  はボリューム全体で散逸される電力を、  $I_2$  は上面から流入する電流の量を表しています。今、電位は 1 に設定してあるので、  $I_1 + I_2 = 0$  というのが理論上の要請である点に注意してください。

Electrical Conduction in a Cone

14:38:24 9/4/08  
FlexPDE 5.1.0

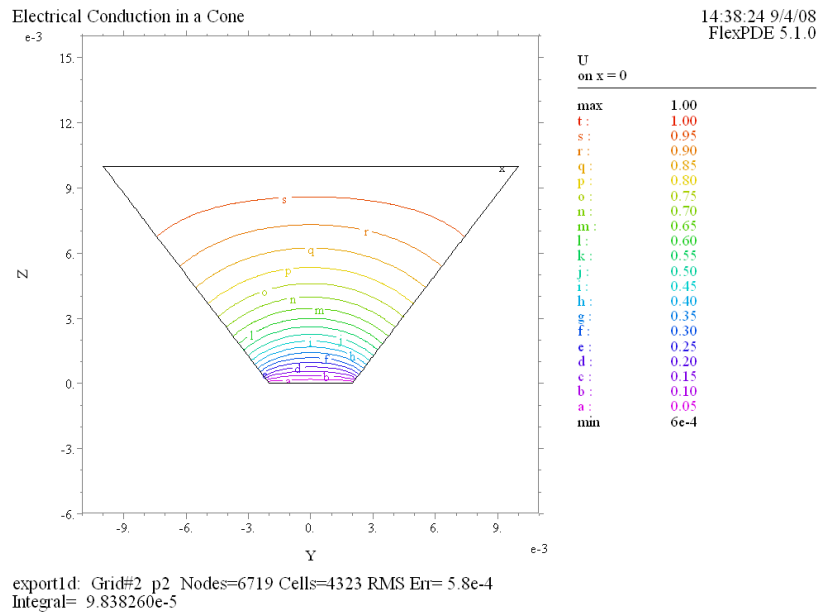
x, y, z  
(-0.03, -0.08, 30.)



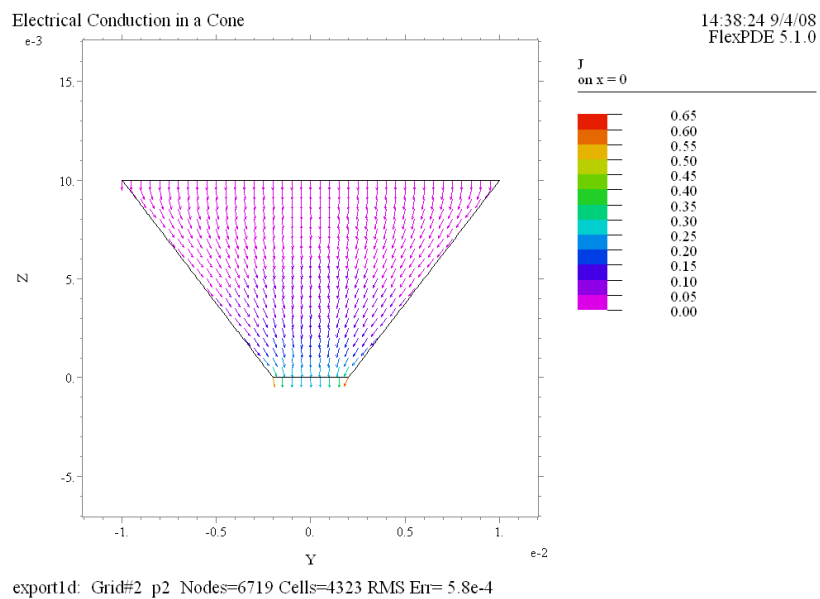
export1d: Grid#2 p2 Nodes=6719 Cells=4323 RMS Err= 5.8e-4  
power= 5.112365e-6 current= -5.078884e-6

(2) Contour(U) on  $x = 0$ 

平面  $x = 0$  上における等電位線のプロットです。これらの曲線は円錐斜面とは直交関係にあります。

(3) Vector(J) norm on  $x = 0$ 

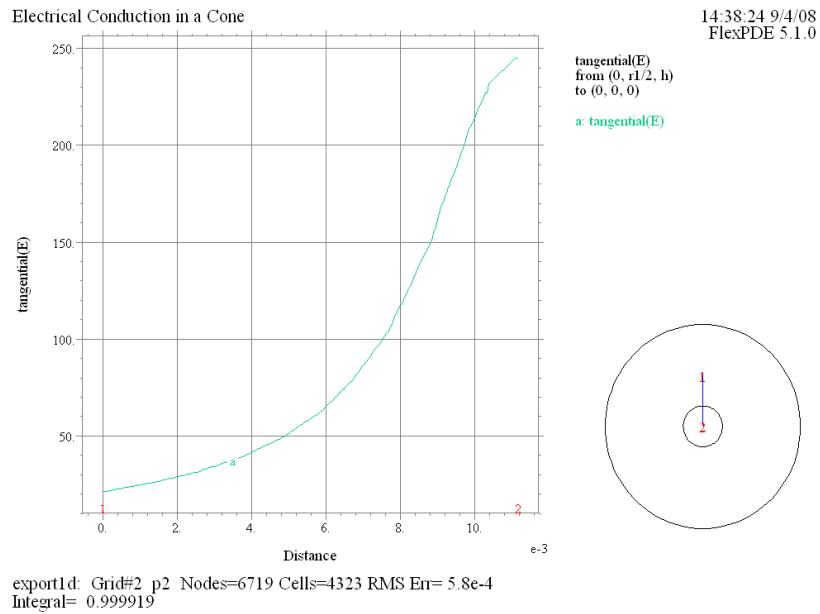
平面  $x = 0$  上における電流密度ベクトル  $J$  のベクトルプロットです。上面から下面に至る流れが表現されています。



## (4) Elevation(tangential(E))

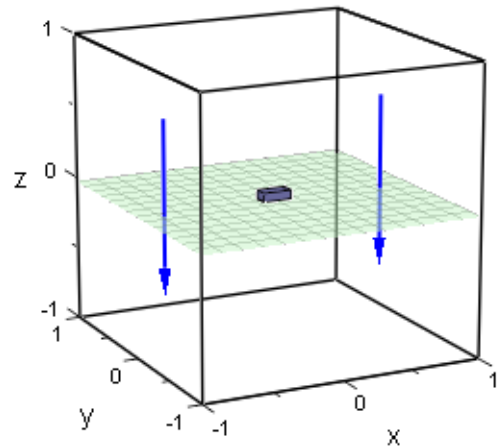
Line\_Integrate from (0, r1/2, h) to (0, 0, 0) { Voltage }

上面'top'上の1点から下面に至る直線に沿って電場ベクトル  $E$  の接線方向成分を elevation プロットの形で図にしたものです。同時に線積分を計算させていますが、FlexPDE による計算値は 0.999919 と理論値である 1 (電位差) に十分近い値となっています。



## 5 Case5 - 3次元誘電体

ここでは平行な電場中に直方体の形状のガラスが置かれていたときの場の様子を FlexPDE で解析してみます。誘電体を扱う際の方程式等背景情報については GB007 を参照ください。解析対象の3次元ドメインとしては1辺が2mの立方体を考えます。



### 5.1 Problem descriptor [ 3dfields1e.pde ]

まずタイトルを設定します。

#### TITLE

```
'Glass Block in a Parallel Field' { 3dfields1e.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

#### SELECT

```
Errlim = 1e-4
```

座標系が3次元直交座標系であることを明示します(デフォルトは Cartesian2)。

#### COORDINATES

```
Cartesian3
```

従属変数を定義します。

#### VARIABLES

```
U { Electric potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類 や関係式を定義します。なお、permittivity は誘電率、dielectric displacement は誘電変位、あるいは電束密度を表す英語です。

## DEFINITIONS

```
L = 1.0 Lx = 0.1 Ly = 0.05 Lz = 0.03
eps0 = 8.854e-12 { Permittivity of vacuum }
epsr { Relative permittivity }
eps = epsr*eps0 { Permittivity }
E0 = 1.0 D_0 = eps0*E0 { Far field }
E = -grad(U) Em = magnitude(E)
D = eps*E Dm = magnitude(D) { Dielectric displacement }
```

誘電体を対象とする場合の偏微分方程式を規定します。真電荷が存在しないケースなので右辺は 0 となります (GB007 参照)。

## EQUATIONS

```
div(D) = 0
```

Extrusion の設定に際しては水平面のみを考えれば良いので話は単純です。なおレイヤの定義が必要になるのは空気とガラスとで誘電率が異なるためです。

```
EXTRUSION { Parallel surfaces }
Surface 'bottom' z = -L
Layer 'air 1' { Layer below block }
Surface 'lower' z = -Lz { Lower face of block }
Layer 'glass' { Layer containing glass }
Surface 'upper' z = Lz { Upper face of block }
Layer 'air 2' { Layer above block }
Surface 'top' z = L
```

BOUNDARIES セクションにおいて base plane 上でのリージョン構成定義と境界条件の設定を行います。平行場ということなので、まず上面と下面で自然境界条件型の指定を行います。

## BOUNDARIES

```
Surface 'bottom' Natural(U) = D_0 { Since D=-eps*grad(U) }
Surface 'top' Natural(U) = -D_0
```



次に base plane 上でドメイン（この場合、正方形）の定義を行います。またそれが extrude された 3 次元領域内で設定されるべきパラメータ（この場合、比誘電率）を規定します。ただしガラスブロックの部分については次のリージョン定義で上書きされます。なお、この部分で  $\text{Natural}(U) = 0$  という境界条件を指定していますが、これは extrude された周囲の側壁に対して適用されます。

```
Region 'domain'           { Full solution domain }
  Layer 'air 1' epsr = 1
  Layer 'glass' epsr = 1
  Layer 'air 2' epsr = 1
  Start (-L, -L) Natural(U) = 0
  Line to (L, -L) to (L, L) to (-L, L) to Close
```

Base plane 上でガラスブロックに対応する長方形のリージョンを定義、それを extrude した柱状領域でレイヤごとにパラメータ値を再設定します。

```
Region 'block'           { Redefine space }
  Layer 'air 1' epsr = 1
  Layer 'glass' epsr = 7.0   { Glass block }
  Layer 'air 2' epsr = 1
  Start (-Lx, -Ly) Line to (Lx, -Ly) to (Lx, Ly)
  to (-Lx, Ly) to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

```
PLOTS
  Grid(x, y, z)
  Contour(U) on x = 0
  Contour(U) on y = 0
  Contour(U) on z = 0
  Vector(E) norm on x = 0
  Vector(E) norm on x = 0 zoom(-0.2, -0.2, 0.4, 0.4)
  Vector(D) norm on x = 0 zoom(-0.2, -0.2, 0.4, 0.4) Report(D_0)
```

```
END
```

## 5.2 実行結果

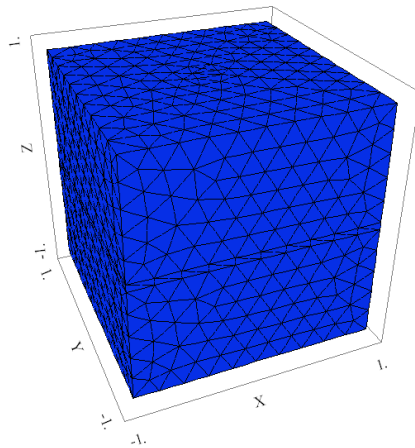
### (1) Grid(x, y, z)

FlexPDE によって生成された 3 次元のメッシュ構成を示しています。

Glass Block in a Parallel Field

14:13:40 9/8/08  
FlexPDE 5.1.0

x, y, z  
(-3.98, -9.6, 30.)



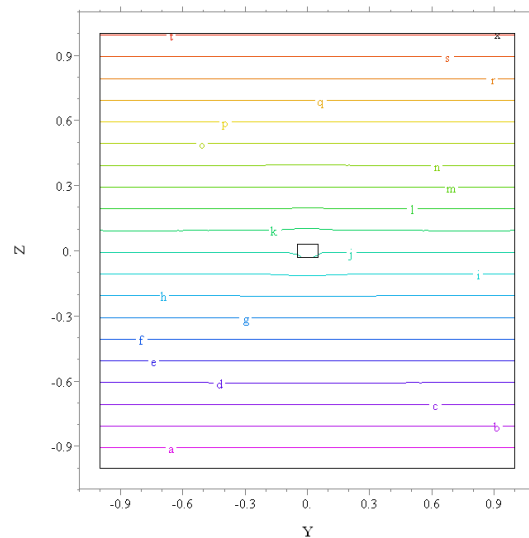
export1e: Grid#2 p2 Nodes=14433 Cells=9522 RMS Err= 4.2e-5

### (2) Contour(U) on x = 0

平面  $x = 0$  上における等電位線のプロットです。

Glass Block in a Parallel Field

14:13:40 9/8/08  
FlexPDE 5.1.0



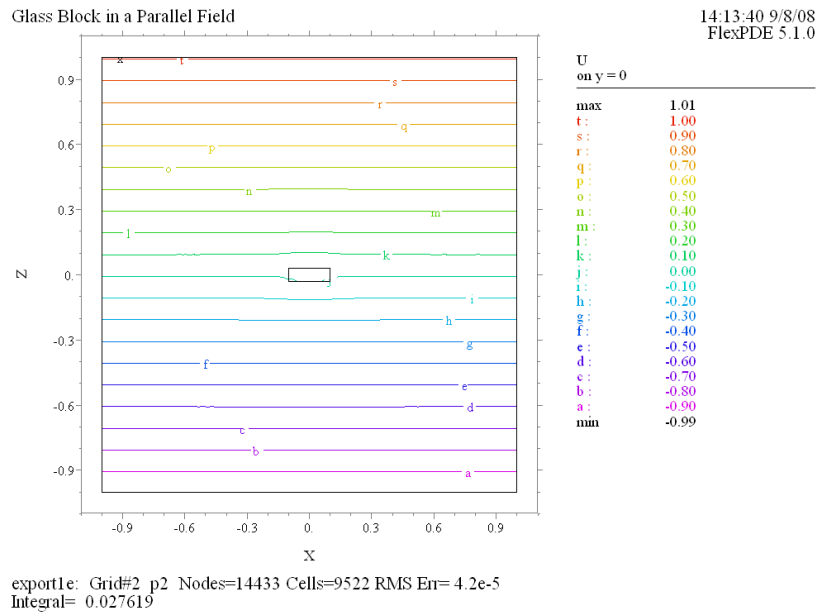
U  
on x = 0

|     |       |
|-----|-------|
| max | 1.01  |
| t : | 1.00  |
| s : | 0.90  |
| r : | 0.80  |
| q : | 0.70  |
| p : | 0.60  |
| o : | 0.50  |
| n : | 0.40  |
| m : | 0.30  |
| l : | 0.20  |
| k : | 0.10  |
| j : | 0.00  |
| i : | -0.10 |
| h : | -0.20 |
| g : | -0.30 |
| f : | -0.40 |
| e : | -0.50 |
| d : | -0.60 |
| c : | -0.70 |
| b : | -0.80 |
| a : | -0.90 |
| min | -0.99 |

export1e: Grid#2 p2 Nodes=14433 Cells=9522 RMS Err= 4.2e-5  
Integral= 0.027623

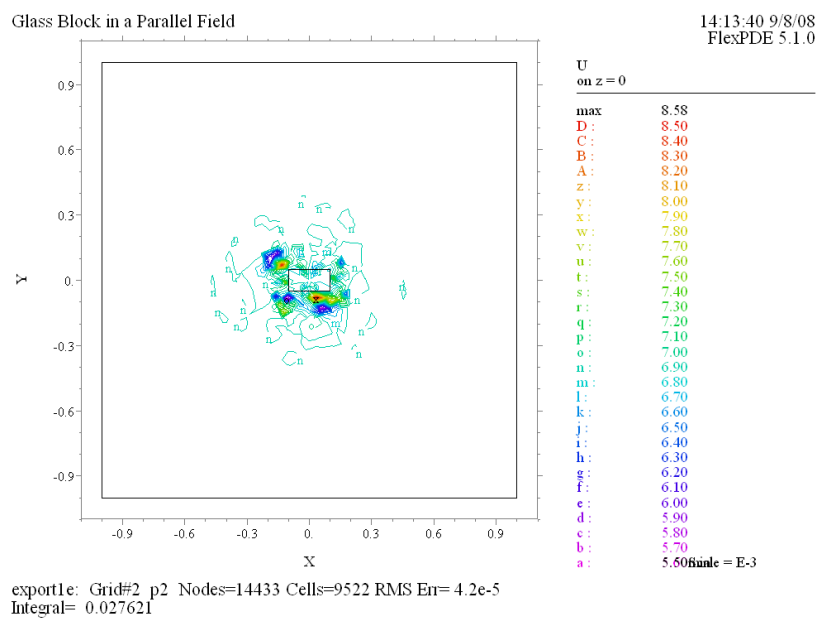
(3) Contour(U) on  $y = 0$

平面  $y = 0$  上における等電位線のプロットです。



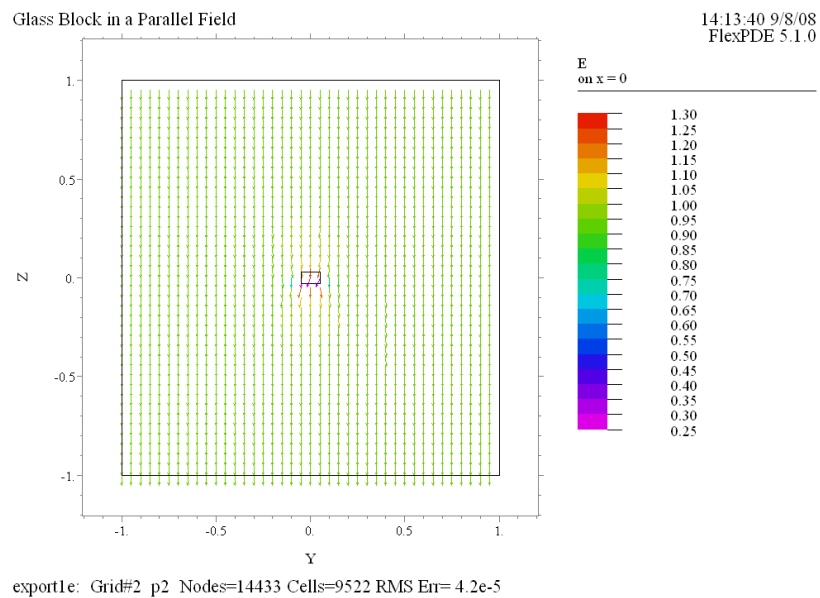
(4) Contour(U) on  $z = 0$

平面  $z = 0$  上における等電位線のプロットです。 $z = 0$  上では  $U$  の値は一律ほぼ 0 であるため、わずかな計算誤差が増長されて表示される結果となっています。

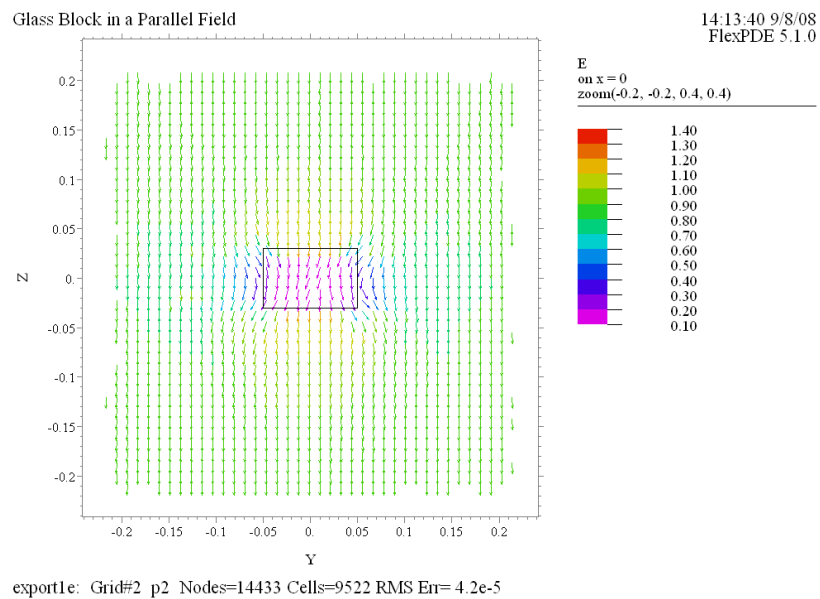


(5) Vector(E) norm on  $x = 0$ 

平面  $x = 0$  上における電場  $E$  のベクトルプロットです。ガラスブロック周囲で乱れが生じていますが、このスケールでは解像度が十分とは言えません。

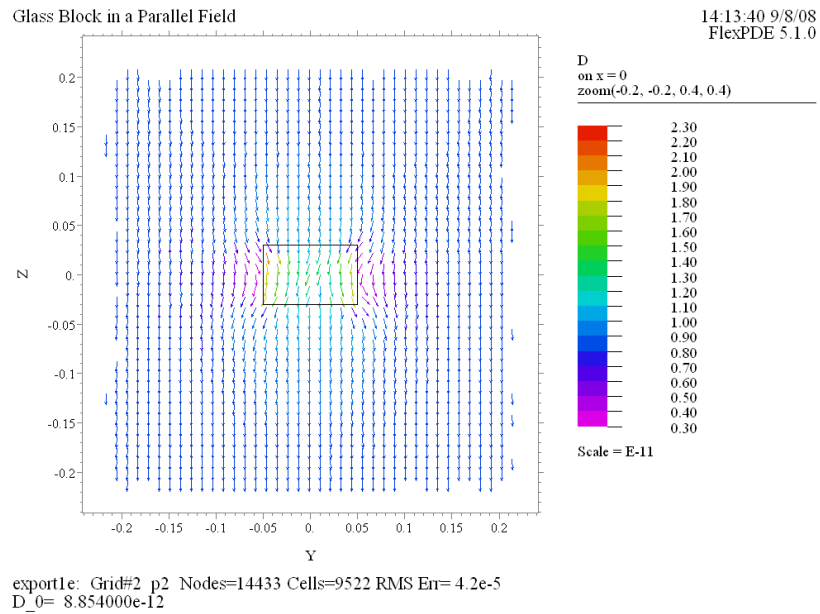
(6) Vector(E) norm on  $x = 0$  zoom(-0.2, -0.2, 0.4, 0.4)

プロット (5) と同じ内容ですが、ガラスブロック周囲のみを拡大表示したものです。電場ベクトル  $E$  の乱れが読み取れます。



(7) Vector(D) norm on  $x = 0$  zoom(-0.2, -0.2, 0.4, 0.4) Report(D.0)

平面  $x = 0$  上における電束密度  $D$  のベクトル場をプロットしたものです。ガラスブロックから離れた部分ではベクトル長が  $0.9e-11$  前後の値となっていることがその色からわかります（定数  $D_0$  の値が Report 文によって出力されている点に注意）。一方、ガラスブロックの周囲と内部ではこの値よりも小さくなっている部分と大きくなっている部分があります。 $D_m$  の最大値はガラスブロックの内部で生じています。



■