本資料は **Scientific Notebook** を用いて作成したものです。

Example1　微分方程式 $y' + 2xy = x$ を解け。

1. 教科書的解法

1階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \tag{1}$$

で与えられる。今の場合、$P(x) = 2x, Q(x) = x$なのだから

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2xdx}\left(\int xe^{\int 2xdx}dx + C\right) \\ &= e^{-x^2}\left(\int xe^{x^2}dx + C\right) \\ &= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right) \\ &= Ce^{-x^2} + \frac{1}{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

2. SNB-MuPAD

数式 $y' + 2xy = x$ に対して「常微分方程式」:「解」コマンドを適用、結果は次の通り。

$$\left\{C_{35}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\right\} \tag{3}$$

次ページへつづく

Example2　微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = xe^{4x}$ を解け。

1. 教科書的解法

この場合、同次方程式の基本解 $y_1 = e^{3x}, y_2 = xe^{3x}$ は容易に求まる。一方、特殊解については定数変化法を用いることによって求めることができる。

> y_1, y_2 が $y'' + Py' + Qy = 0$ の基本解ならば、
> $$y = y_1 \int \frac{-y_2 R}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)} dx$$
> は、$y'' + Py' + Qy = R$ の特殊解である。ただしWはロンスキー行列式を意味する。

今、

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{3x}e^{3x}$$

非同次項は $R(x) = xe^{4x}$ であるから、

$$C_1(x) = \int \frac{-y_2 R}{W(y_1, y_2)} dx = (-x^2 + 2x - 2)e^x$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)} dx = (x - 1)e^x$$

従って特殊解は

$$\begin{aligned} y &= y_1 C_1(x) + y_2 C_2(x) \\ &= (x - 2)e^{4x} \end{aligned}$$

ゆえに求める一般解は

$$y = (x - 2)e^{4x} + (A + Bx)e^{3x} \tag{4}$$

2. SNB-MuPAD

数式 $y'' - 6y' + 9y = xe^{4x}$ に対して「常微分方程式」:「解」コマンドを適用、結果は次の通り。

$$\{C_{21}e^{3x} + xe^{4x} - 2e^{4x} + C_{22}xe^{3x}\} \tag{5}$$

数式4と等価な結果が得られている。