LightStone

Stata で簡単に試せる SEM

第3回　2ファクタモデルの推定

SEM の第三回目です. 今回の目的はこれまでの知識を利用して 2 ファクタモデルを推定することです. そして, 第 2 回の最後に少し触れた“識別”について, もう少し詳しく解説します.

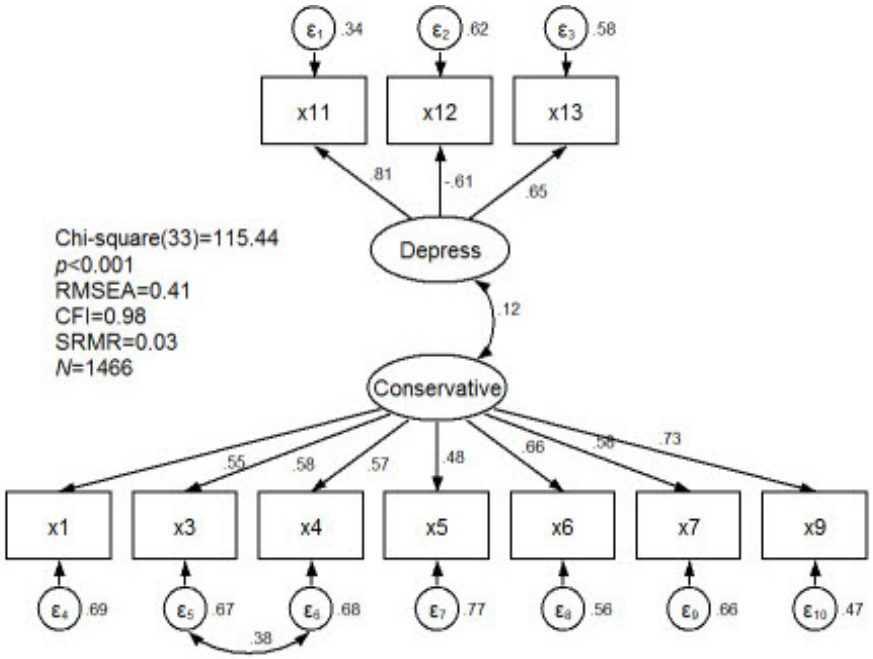
利用する書籍は Alan C. Acock, 2013. *Discovering Structural Equation Modeling Using Stata, Revised Edition*, Stata Press の第一章の後半です.

第1章　2ファクタモデル

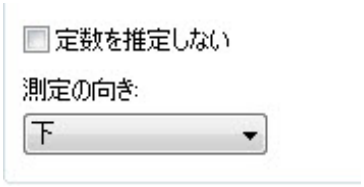
ここではアンケート結果を利用して計測できない潜在変数である Conservative と Depress の統計的な関係を考察します.

1.1　パス図の作成

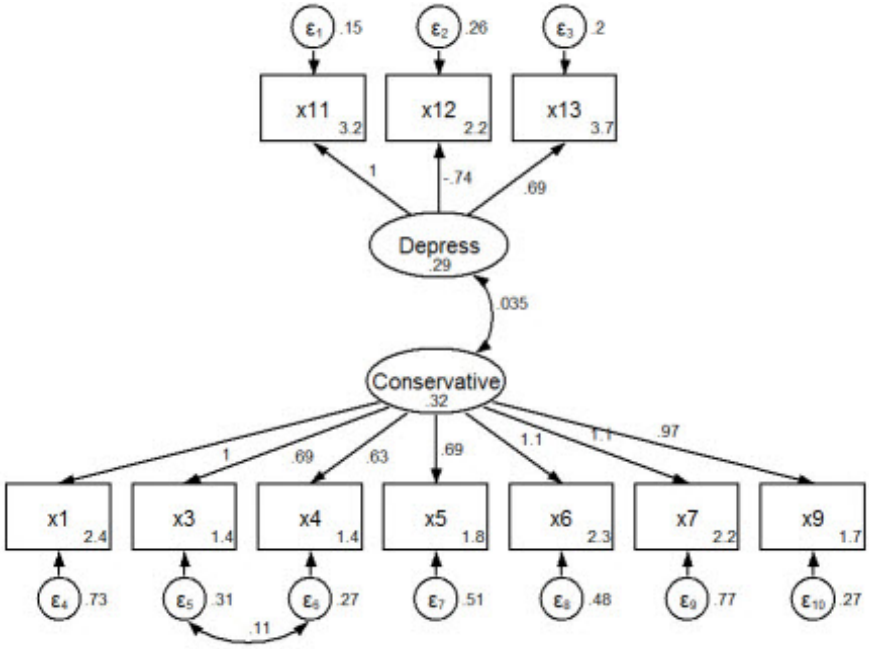
最初にここで作成する 2 ファクタモデルを以下に示します. 最終的に, 次のパス図を作成することを目的とします. データは第二回と同じく nlsy97cfa.dta を利用します.



前回まで利用したパス図は利用せずに新たに作成してみましょう. 今回のように計測可能変数な変数 x が多い場合は SEM ビルダの画面で  のアイコンをクリックします. そして上部の Depress を作図します. 測定変数の項目には x11 x12 x13, または, x11-x13 と入力します. それが終了したら, 次にもう一度同じアイコンをクリックし, Conservative の部分を作成します. この時, ダイアログの下部にある次に示す項目で計測の向きを調整します.



同じく測定変数の項目に x1 x3-x7 x9 と入力します. その後, 共分散を設定する箇所に  のアイコンを利用して両矢印の曲線を引きます. 測定変数の x と, 誤差項の添え字を一致させて方がきれいに見えますが, それは本質的な問題ではありませんので, そのまま作図してください. このように図が作成できたら, SEM ビルダで推定/推定と操作します.



この図をもう少しスッキリさせたいと思います. 具体的には 1) 潜在変数 (楕円)Depress と Conservative の分散を非表示にする, 2) 観測可能な変数 (矩形) の定数項を非表示にします. 潜在変数に関しては, SEM ビルダで設定/変数/全潜在変数と操作します. 次に示す結果のタブで, 分散の項目を (なし) に変更します.

次は設定/変数/線形の内生観測変数と操作します. そして結果のタブで切片とあるところを同様に (なし) に変更します. 最後に表示/標準化回帰係数を表示と操作します. 推定値が更新されたら, Stata のコマンドウィンドウを表示し, 適合度検定のコマンドを実行します.

```
. estat gof,stats (all)
```

Fit statistic	Value	Description
Likelihood ratio		
chi2_ms(33)	115.438	model vs. saturated
p > chi2	0.000	
chi2_bs(45)	3630.536	baseline vs. saturated
p > chi2	0.000	
Population error		
RMSEA	0.041	Root mean squared error of approximation
90% CI, lower bound	0.033	
upper bound	0.050	
pclose	0.958	Probability RMSEA <= 0.05
Information criteria		
AIC	30276.919	Akaike´s information criterion
BIC	30446.209	Bayesian information criterion
Baseline comparison		
CFI	0.977	Comparative fit index
TLI	0.969	Tucker-Lewis index
Size of residuals		
SRMR	0.033	Standardized root mean squared residual
CD	0.952	Coefficient of determination

仕上げとしてパス図に適合度検定の一部の情報を追加します. テキストアイコン T をクリックしてモデルの適合度に関する情報を次のように入力します.

```
Chi-square(33)=115.44
{it:p}<0.01
RMSEA=0.41
CFI=0.98
SRMA=0.03
{it:N}=1466
```

ここで {it:p} は p をイタリックで表示する書式です.

このように操作することによって, 2 つの潜在変数 Depress と Conservative の間の相関は弱いことが分かりました.

1.2　識別について

SEM におけるモデル構築は変数の分散, 共分散の情報をモデル化するところに目的があります. 例えば, Depress のモデルを例に考えてみます. Depress では質問が 3 つ (x11, x12, x13) だけでした. この時, 分散共分散に関する情報は公式 $k\left(k+1\right)/2$ から,

$$\frac{3\times 4}{2}=6$$

となり, 6 個の分散共分散の情報が手元にあることが分かります. つまり,

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x11} & & \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} & \\ \sigma_{x31} & \sigma_{x32} & \sigma_{x33}\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

3×3 行列の下三角部分だけを行列で示しましたが, 上三角は対称性故, 考える必要はありません. 前回も示したように潜在変数 X と各質問の関係は次のようになっています.

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1+\beta_1 Depress+e.x_1 \\ x_2 &= \alpha_2+\beta_2 Depress+e.x_2 \\ x_3 &= \alpha_3+\beta_3 Depress+e.x_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

話を簡単にするため, 標準化係数の推定を前提にして考えます. 定数項 α_i は質問の平均値から求めますので, 我々は 1.1 式から $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\mathrm{V}\left(e.x_1\right),\mathrm{V}\left(e.x_2\right),\mathrm{V}\left(e.x_3\right)$ の 6 個の情報を求めれば良いことになります.[1] この時, 自由度は (分散共分散行列の 6 個の情報)-(1.2 式における β_i と誤差項の分散の合計 6 個のパラメータ) でゼロとなります. 数学の連立方程式を例に考えれば, 6 個の不明な係数があって, 式が 6 本ある状態です. この時, 連立方程式の解を求める事ができ, 自由度はゼロになります. この場合, 解は一意に定まりますので, カイ二乗検定による適合度検定は実行できません. このように自由度がゼロの状態を丁度識別と呼びます. 大切なことは推定するパラメータの個数に等しいか, または上回る数の情報が 1.1 式から提供される必要があるということです.

[1] 潜在変数の期待値はゼロであることを思い出してください.

念のため, 質問が 4 つ用意されている状況を考えてみましょう.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x11} & & & \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} & & \\ \sigma_{x31} & \sigma_{x32} & \sigma_{x33} & \\ \sigma_{x41} & \sigma_{x42} & \sigma_{x43} & \sigma_{x44} \end{bmatrix}$$

分散共分散行列の提供する情報は $(4 \times 5)/2 = 10$ 個です.

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 Depress + e.x_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 Depress + e.x_2 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 Depress + e.x_3 \\ x_4 &= \alpha_4 + \beta_4 Depress + e.x_4 \end{aligned}$$

この連立方程式では β_i が 4 つ, 誤差項の分散が 4 つで合計 8 つの推定値を得る必要があります. 自由度は 10-8=2 となります. 今回示した 2 ファクタモデルのように誤差項間に共分散の存在を 1 箇所仮定している場合は推定すべき情報が 1 つ増えますので, 自由度は 1 となります.

逆に質問が 2 つしかない場合, 何が起きるでしょう?

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x11} & \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} \end{bmatrix}$$

分散共分散の情報は 3 つしか提供されません. これに対してモデルは

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 Depress + e.x_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 Depress + e.x_2 \end{aligned}$$

となり, 推定するパラメータは 4 個であり, 情報が足りません. 結果として推定が実行できないことになります. 試に次のコマンドを実行してみましょう.

```
. sem (Depress -> x11 x12)
```

```
 (1715 observations with missing values excluded)

Endogenous variables
Measurement:  x11 x12
Exogenous variables
Latent:       Depress
Fitting target model:
Iteration 0:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 1:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 2:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 3:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 4:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 5:   log likelihood = -13514.557  (not concave)
Iteration 6:   log likelihood = -13514.557  (backed up)
Structural equation model                       Number of obs     =      7,270
Estimation method  = ml
Log likelihood     = -13514.557
 ( 1)  [x11]Depress = 1
```

	OIM Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
Measurement						
x11 <-						
Depress	1	(constrained)				
_cons	3.224622	.0077813	414.41	0.000	3.209371	3.239873
x12 <-						
Depress	-.4828791	190.059	-0.00	0.998	-372.9916	372.0259
_cons	2.234113	.0076308	292.78	0.000	2.219157	2.249069
var(e.x11)	3.58e-11	173.2574			.	.
var(e.x12)	.32068	40.39881			1.9e-108	5.5e+106
var(Depress)	.4401916	173.2574			.	.

```
LR test of model vs. saturated: chi2(-1)  =      0.00, Prob > chi2 =      .
```

この推定結果の上部をみると not concave という表示が消えないうちに計算が終了し, 正常に推定が完了していないことが分かります. さらに, 表の下側にある分散の項目が推定できていないことが分かります.

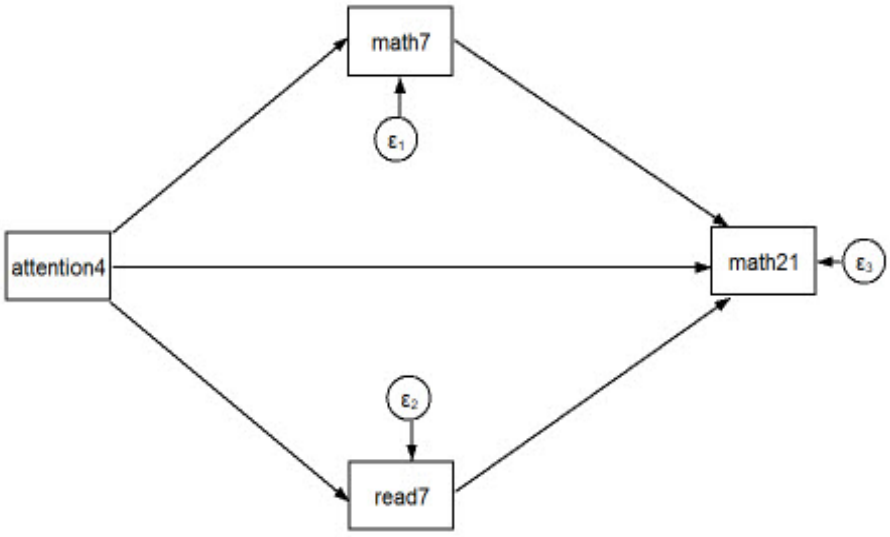
第2章　パスモデル

ここではSEMを利用してパスモデルを推定します. Alan C. Acock, 2013. *Discovering Structural Equation Modeling Using Stata, Revised Edition*, Stata Pressの第2章にあるA substantive example of a path modelの要約になります. このセクションで紹介するパスモデルの特徴は観測可能な変数だけを利用する事です. つまり, 一般的な連立方程式を考える訳ですが, ポイントは誤差項間の相関の設定にあります.

2.1　幼児期の集中力と学力の関係

McClelland et al. (2013) のデータ path.dta を利用して4才の時の集中力の持続性と学力の関係を仮説検定します. ただし, ここでは中間変数として7才の時の読む力と計算力を利用します.

次のようなパス図を作成します.



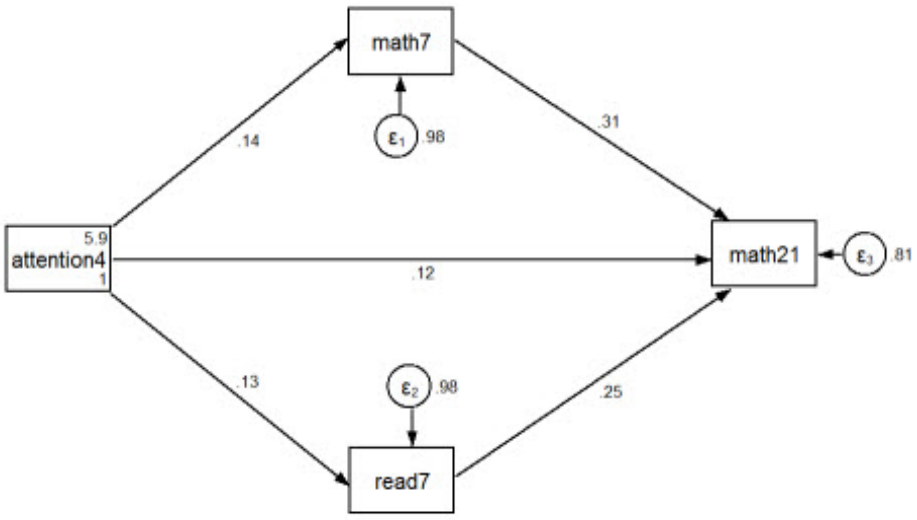
sembuilder のウィンドウにある推定メニューを利用してモデルを推定します. 欠損値はランダムで, 変数が正規分布に従うことを仮定して推定手法は mlmv を利用します.

```
. sem (attention4 -> math7, ) (attention4 -> read7, ) (attention4 -> math21, ) (math7 -> math21, ) (read
> 7 -> math21, ), method(mlmv) standardized
Endogenous variables
Observed:  math7 read7 math21
Exogenous variables
Observed:  attention4
Fitting saturated model:
(省略)
Structural equation model                       Number of obs     =        430
Estimation method  = mlmv
Log likelihood     =  -4246.557
```

Standardized	Coef.	OIM Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
Structural						
math7 <-						
attention4	.141458	.0486307	2.91	0.004	.0461437	.2367723
_cons	3.04888	.3344304	9.12	0.000	2.393408	3.704351
read7 <-						
attention4	.1289838	.0491968	2.62	0.009	.0325598	.2254077
_cons	3.163475	.3383925	9.35	0.000	2.500238	3.826712
math21 <-						
math7	.3075685	.0481426	6.39	0.000	.2132108	.4019262
read7	.2520422	.0489132	5.15	0.000	.156174	.3479104
attention4	.1171187	.0467622	2.50	0.012	.0254664	.208771
_cons	1.380531	.361878	3.81	0.000	.6712636	2.089799
var(e.math7)	.9799896	.0137584			.9533913	1.00733
var(e.read7)	.9833632	.0126912			.9588009	1.008555
var(e.math21)	.8075246	.0341705			.7432537	.8773531

```
LR test of model vs. saturated: chi2(1)   =     27.56, Prob > chi2 = 0.0000
```

パス図は次のようになります.



推定値の考察

- math7 に対して attention4 は有意である (符号は正).
- read7 に対しても有意である (符号は正).
- math21 に対して math7 と read7 はどちらも有意であり, math7 の影響が大きい
- math21 に対する attention4 の効果は有意であるが, math7 と read7 よりも小さい.

内生変数の分散に対する考察

次のコマンドを実行して内生変数の分散に対するモデルの説明力を考察します.

```
. estat eqgof
```

```
Equation-level goodness of fit

─────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
                          Variance
     depvars      fitted  predicted   residual  R-squared        mc       mc2
─────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
observed
       math7    7.621122   .1525014    7.46862   .0200104   .141458  .0200104
       read7    64.70388   1.076467   63.62742   .0166368  .1289838  .0166368
      math21    6.920939    1.33211   5.588828   .1924754  .4387202  .1924754
─────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
     overall                                     .0515245
─────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
mc  = correlation between depvar and its prediction
mc2 = mc^2 is the Bentler-Raykov squared multiple correlation coefficient
```

- 観測した変数 math7 と read7 について, モデルで説明可能な分散の割合は 2% 程度である.
- 一方, math21 に対する説明力は 19% 程度ある.

$$R^2 = \frac{\text{内生変数の分散の予測値}}{\text{内生変数の分散}}$$

- mc2 (Bentler-Raykov R^2) は非再帰形モデルの場合に参照する

モデルの適合度に対する考察

適合度の考察を行います.

```
.  estat gof,stats(all)
```

- 尤度比検定の項目で $\chi^2(1) = 27.56, p < 0.001$ とありますから, 共分散構造をモデルで再現できていないことが分かる.

- 誤差に関する項目から RMSEA が約 0.25 で, 0.05 以下という規準を大きく上回っており, 誤差が大きすぎることが分かる.
- CFI の目安である 0.9 をクリアしていない

変数間の相関

変数間に相関を設定することによってモデルがどの程度, 改良できるか次のコマンドによって調べます.

```
. estat mindices
```

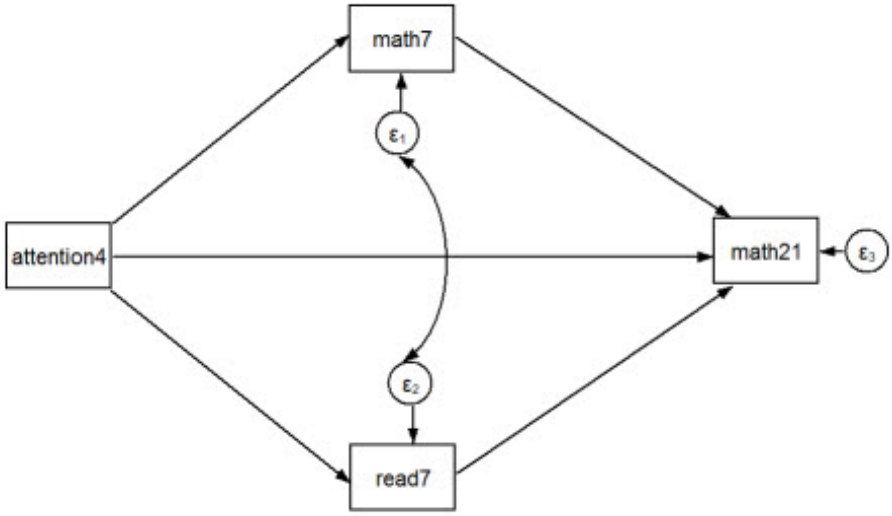
Fit statistic	Value	Description
Likelihood ratio		
chi2_ms(1)	27.561	model vs. saturated
p > chi2	0.000	
chi2_bs(6)	130.877	baseline vs. saturated
p > chi2	0.000	
Population error		
RMSEA	0.249	Root mean squared error of approximation
90% CI, lower bound	0.174	
upper bound	0.332	
pclose	0.000	Probability RMSEA <= 0.05
Information criteria		
AIC	8515.114	Akaike´s information criterion
BIC	8559.816	Bayesian information criterion
Baseline comparison		
CFI	0.787	Comparative fit index
TLI	-0.276	Tucker-Lewis index
Size of residuals		
CD	0.052	Coefficient of determination

Note: SRMR is not reported because of missing values.

- カイ二乗検定統計量はどこに相関を設定しても同じ値だけ減少し, モデルを改良することが分かる
- 時間の流れを考えて, math21 から read7 や math7 に与える影響は存在しないので, 実質的な意味はない.
- 計算に際し, 問題文を読む力が必要とされるケースでは read7 から math7 への影響は考えられる.
- しかし, その逆は考えずらい.
- 計算力や読む力に子供の家庭の社会経済的地位が影響したり, 性差が影響すると考えることができるなら誤差項の間に相関を考えることは合理的である.

2.2 誤差項の相関

ここでは math7 と read7 の誤差項間に相関を設定します. 先のモデルの推定結果から自由度が 1 であることが分かりますので, ここで新たに共分散を設定すると perfect fit になり, 自由度がゼロになりますが, 設定に合理性があれば, 自由度ゼロを気にする必要はありません.



このパス図を使って, 標準化係数を mlmv によって推定した結果を次に示します.

```
Structural equation model                       Number of obs     =        430

Estimation method  = mlmv
Log likelihood     = -4232.7763
```

Standardized	Coef.	OIM Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
Structural						
math7 <-						
attention4	.1424678	.0485568	2.93	0.003	.0472983	.2376373
_cons	3.043008	.3341487	9.11	0.000	2.388089	3.697928
read7 <-						
attention4	.1296611	.0491074	2.64	0.008	.0334123	.22591
_cons	3.162223	.3378934	9.36	0.000	2.499964	3.824482
math21 <-						
math7	.3008525	.0467369	6.44	0.000	.20925	.3924551
read7	.2462258	.0473568	5.20	0.000	.1534081	.3390434
attention4	.1147871	.0460627	2.49	0.013	.024506	.2050683
_cons	1.365485	.3571808	3.82	0.000	.6654235	2.065547
var(e.math7)	.9797029	.0138355			.9529576	1.007199
var(e.read7)	.983188	.0127347			.9585427	1.008467
var(e.math21)	.7779759	.0384575			.7061369	.8571234
cov(e.math7,e.read7)	.2599788	.0469642	5.54	0.000	.1679306	.352027

```
LR test of model vs. saturated: chi2(0)   =      0.00, Prob > chi2 =      .
```

分散の説明力を確認します.

```
. estat eqgof
```

```
. estat eqgof
Equation-level goodness of fit
```

depvars	Variance fitted	Variance predicted	Variance residual	R-squared	mc	mc2
observed						
math7	7.619575	.154655	7.46492	.0202971	.1424678	.0202971
read7	64.62929	1.086548	63.54274	.016812	.1296611	.016812
math21	7.178428	1.593784	5.584644	.2220241	.4711943	.2220241
overall				.0448891		

```
mc  = correlation between depvar and its prediction
mc2 = mc^2 is the Bentler-Raykov squared multiple correlation coefficient
```

- math7 と read7 の分散の説明力はほぼ変化しない
- math21 に関しては 0.19 から 0.22 に向上している
- 今, 自由度はゼロなので estat gof,stats(all) や estats mindices コマンドに意味はない

2.3　各種効果の推定

パス図を見ると math21 に対して 3 つの矢印が引かれている

- attention4 からの効果を直接効果と呼ぶ
- math7 および read7 を経由している効果は間接効果と呼ぶ
- 2 つの効果は次のコマンドを用いて一覧表示できる

```
. estat teffects,standardize
```

Direct effects

	OIM Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	Std. Coef.
Structural					
math7 <-					
attention4	.1290411	.0446933	2.89	0.004	.1424678
read7 <-					
attention4	.342035	.1313072	2.60	0.009	.1296611
math21 <-					
math7	.2920135	.0470959	6.20	0.000	.3008525
read7	.0820604	.0161567	5.08	0.000	.2462258
attention4	.1009146	.0408745	2.47	0.014	.1147871

Indirect effects

	OIM Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	Std. Coef.
Structural					
math7 <-					
attention4	0	(no path)			0
read7 <-					
attention4	0	(no path)			0
math21 <-					
math7	0	(no path)			0
read7	0	(no path)			0
attention4	.0657493	.0202659	3.24	0.001	.0747877

Total effects

	OIM Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	Std. Coef.
Structural					
math7 <-					
attention4	.1290411	.0446933	2.89	0.004	.1424678
read7 <-					
attention4	.342035	.1313072	2.60	0.009	.1296611
math21 <-					
math7	.2920135	.0470959	6.20	0.000	.3008525
read7	.0820604	.0161567	5.08	0.000	.2462258
attention4	.1666639	.0440972	3.78	0.000	.1895748

- 大切な情報は右端の Std. Coef. にある標準化係数である
- 1 番上のテーブルは直接効果, つまり, 間に変数が介在していない部分の効果を示している
- これは普通の標準化係数の出力と同じ
- 2 番目のテーブルは間接効果を示している
- つまり, attention4 から math7 と read7 を経由している効果で 0.0747877.

$$0.142 \times 0.300 + 0.129 \times 0.246$$

- 最後のテーブルは直接効果と間接効果を合計したもの
- 標準化した右端の列をみると分かり易い

それぞれの効果をまとめてみると, 次のようになります.

アウトカム	直接	間接	合計
Math7			
attention4→math7	0.14^{**}	-	0.14^{**}
Read7			
attention4→read7	0.13^{**}	-	0.13^{**}
Math21			
attention4→math21	0.11^{*}	0.07^{**}	0.19^{***}
math7→math21	0.30^{***}	-	0.30^{***}
read7→math21	0.25^{***}	-	0.25^{***}

- 有意水準は非標準化の情報を示している
- $^{*}p < 0.05,^{**}\, p < 0.01,^{***}\, p < 0.001$

簡単なまとめ

- 潜在変数を利用した 2 ファクタモデルを推定し, 観測できない潜在変数間の関係をモデル化した
- 全て観測可能な変数だけを用いた連立方程式モデル (パスモデル) を式を記述する代わりにパス図を用いて構築し, 係数を推定した

以上