

## GB006: 非線形熱伝導

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

熱伝導方程式でも例えば

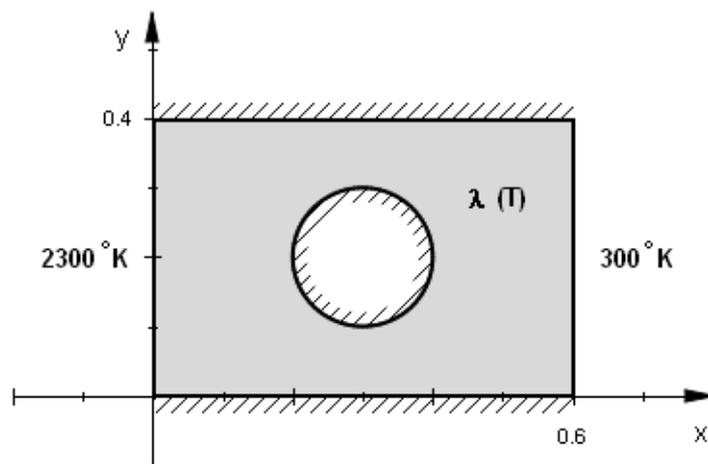
$$\nabla \cdot (-\lambda(x, y) \nabla T) = 0 \quad (1)$$

のように線形で同次型（右辺が 0）の場合には、重ね合せの原理が成り立ちます。すなわち  $T_1, T_2$  が方程式 (1) の解であるとしたとき、 $T = T_1 + T_2$  も (1) の解となります。

しかし熱伝導率  $\lambda$  が温度  $T$  に依存するような場合には方程式は  $T$  に関し線形とは言えなくなるため、重ね合せの原理は適用できなくなります。このため解析的手法で解を求めることはほぼ絶望的となります。しかし FlexPDE の場合にはこのような非線形の問題であっても取扱いが可能です。

## 1 Case1 - 温度依存の熱伝導率

右の図は中央部に円形の穴のあいた酸化マグネシウム (MgO) 製の板を示しています。この材料の熱伝導率は  $T$  に反比例することが知られています。左端は  $2300^\circ\text{K}$  に、右端は  $300^\circ\text{K}$  に保たれているとしたときの温度分布を FlexPDE を用いて解析してみます。ただし、その他の境界は熱的に絶縁されているものとします。また、板は十分に厚く、赤外線放射による表面からの熱のロスは無視しうるものとします。



## 1.1 Problem descriptor [ htransfer01a.pde ]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'MgO Plate with a Hole, k(T)' { htransfer01a.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。デフォルトは 0.002 なのですが、ここでは精度を多少高めに設定します。

```
SELECT
Errlim = 1e-4
```

従属変数を定義します。

```
VARIABLES
temp { Temperature }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を定義します。熱伝導率  $k$  が温度  $temp$  の関数となっているため、方程式が非線形となる点にご注意ください。

```
DEFINITIONS
Lx = 0.6 Ly = 0.4 r0 = 0.1
heat = 0 { Heat source }
k = 15000/temp { Thermal conductivity k(T) }
fluxd_x = -k*dx(temp) fluxd_y = -k*dy(temp)
fluxd = vector(fluxd_x, fluxd_y) fluxd_m = magnitude(fluxd)
```

時間依存型問題の場合、INITIAL VALUES セクションは初期条件の設定のために使用されますが、定常型問題の場合には解探索の初期値という意味合いを持ちます。非線形問題の場合にはシステムをうまく解に誘導する意味において、あるいは計算時間を短縮する意味において初期値の設定は有用と言えます。ここでは左右の境界値の中間を取って  $T(x, y) = 1300$  という初期状態を設定します。

```
INITIAL VALUES
temp = 1300
```

次に方程式を

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = h(x, y)$$

の形で設定します。  $f$  は熱流束密度 (heat flux density) を表すベクトルで  $f = -\lambda \nabla T$  で定義されます。

#### EQUATIONS

```
div(fluxd) = heat
```

今度は境界の形状と境界条件を設定します。

#### BOUNDARIES

```
Region 1
```

```
Start(0,0)
```

```
Natural(temp) = 0 Line to (Lx, 0) { Insulated }
```

```
Value(temp) = 300 Line to (Lx, Ly)
```

```
Natural(temp) = 0 Line to (0, Ly) { Insulated }
```

```
Value(temp) = 2300 Line to Close
```

```
Start(Lx/2 - r0, Ly/2) { Exclude hole }
```

```
Natural(temp) = 0
```

```
Arc(Center = Lx/2, Ly/2) Angle = 360 to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

#### PLOTS

```
Grid(x, y)
```

```
Contour(temp)
```

```
Contour(k) painted
```

```
Vector(fluxd) norm
```

```
Contour(fluxd_x) Contour(fluxd_y) Contour(fluxd_m)
```

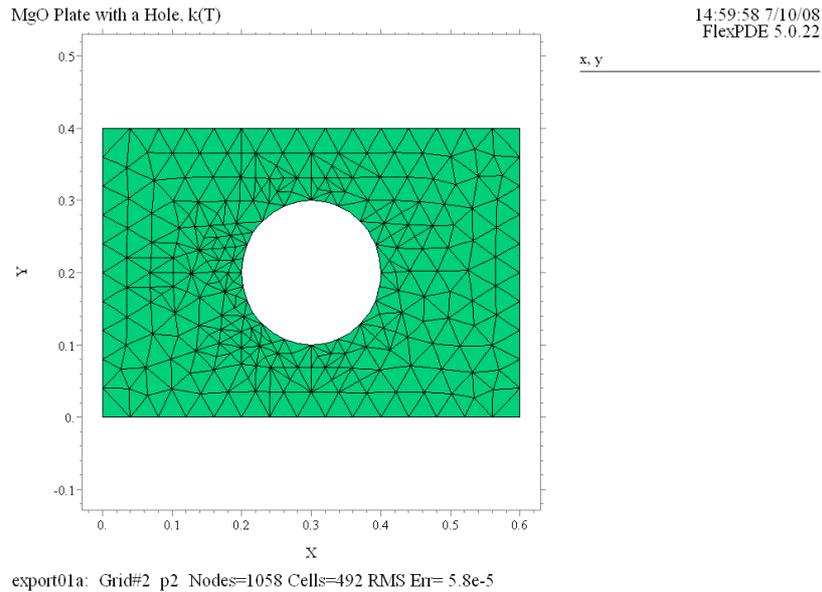
```
Elevation(temp) from (0, 0) to (Lx, 0)
```

```
END
```

## 1.2 実行結果

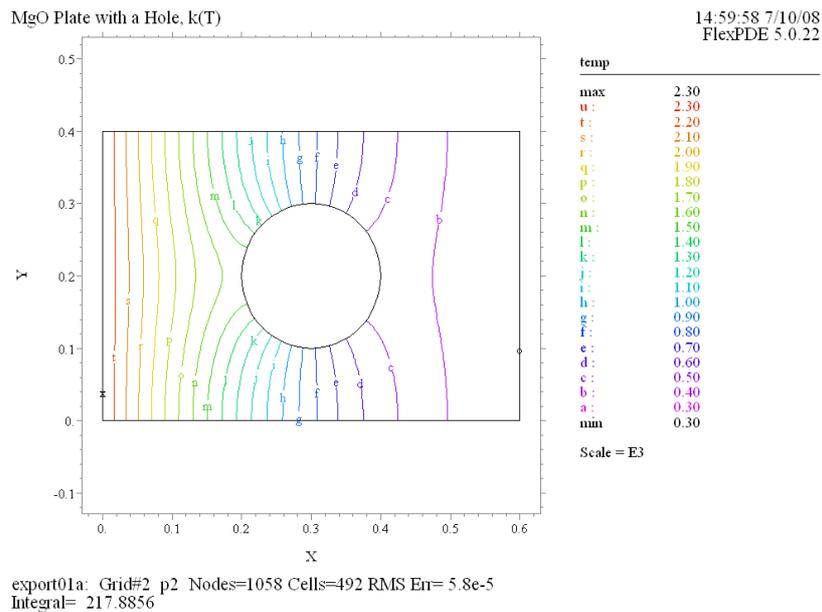
### (1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は 1 回だけで済んでいます。



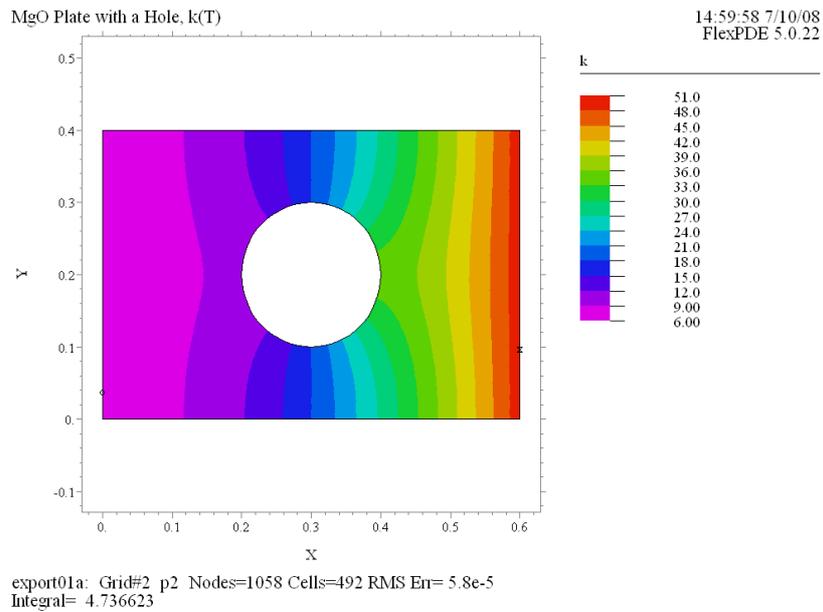
### (2) Contour(temp)

等温線のプロットです。熱抵抗率 (thermal resistivity,  $1/\lambda$ ) が大きなプレート左端、及び穴によってくびれている部分で等温線の密度が高くなっています。



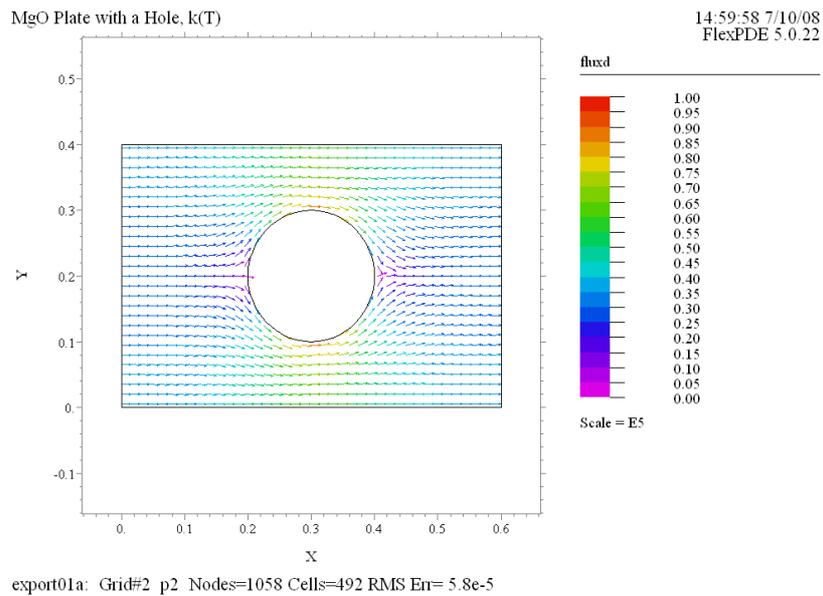
## (3) Contour(k) painted

熱伝導率  $\lambda$  (スクリプト上は  $k$ ) の値の等高線図です。温度の高い左側では小さな値、温度の低い右側では大きな値となっています。



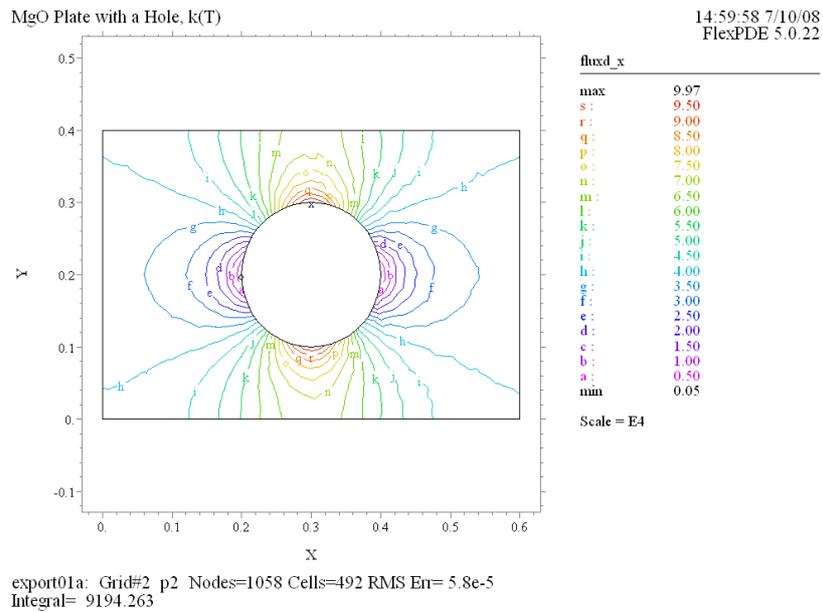
## (4) Vector(fluxd) norm

熱流束密度  $f$  のベクトルプロットを示したものです。等温線図とは直交したものとなっています。



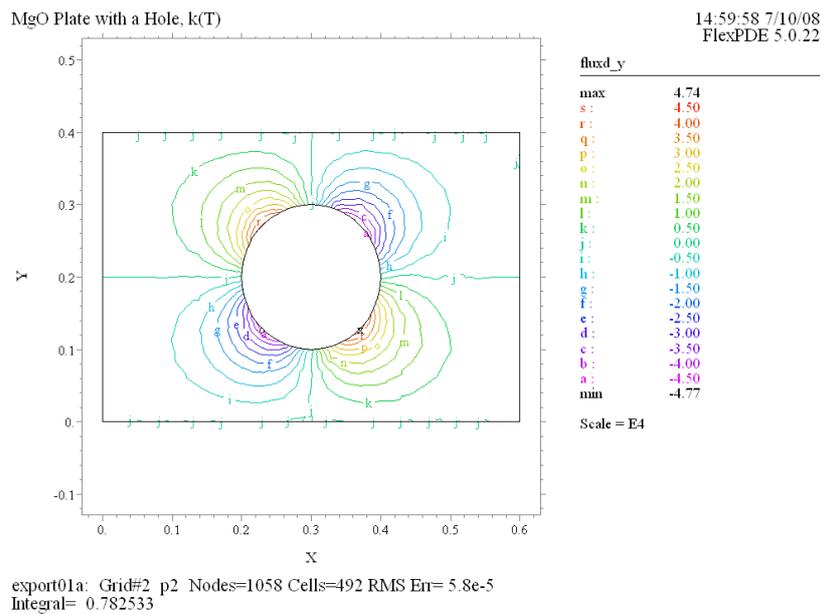
## (5) Contour(fluxd\_x)

熱流束密度  $f$  の  $x$  成分  $f_x$  の値に関する等高線図です。等温線図 (2) が左右非対称であるのに対し、 $f_x$  のプロットは左右対称となっています。これが非対称であればエネルギー保存則に反することになります。



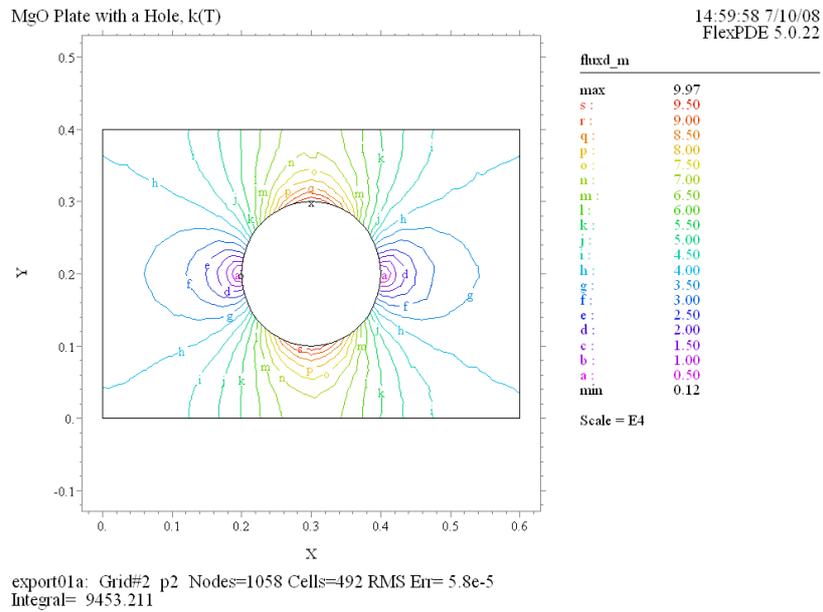
## (6) Contour(fluxd\_y)

熱流束密度  $f$  の  $y$  成分  $f_y$  の値に関する等高線図です。



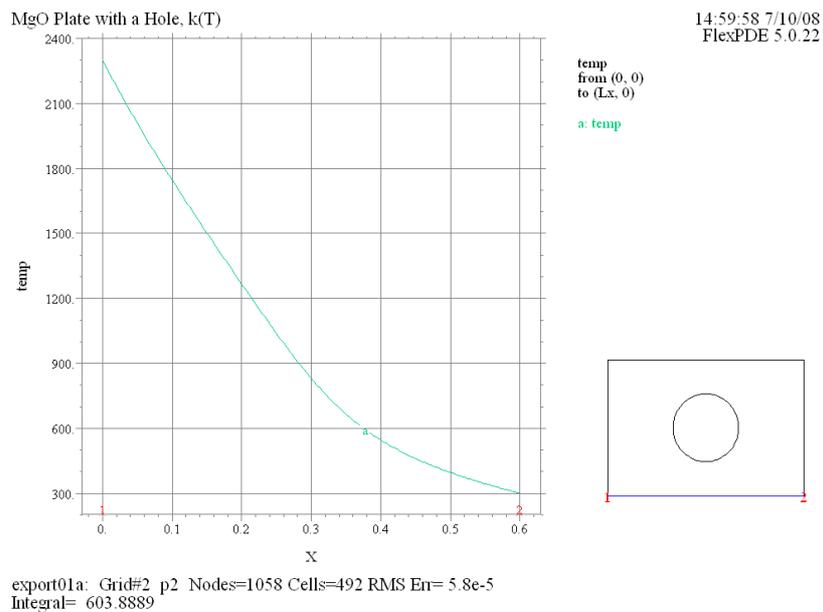
## (7) Contour(fluxd\_m)

熱流束密度  $f$  の絶対値に関する等高線図です。円形の穴の上端と下端部で値が最大となっています。



## (8) Elevation(temp) from (0, 0) to (Lx, 0)

境界下端に沿って温度がどう変化しているかをグラフ化したものです。



## 2 Case2 - 赤外線放射による熱損失

今度は薄い鉄製のフォイルを使って同様の熱伝導について考察します。右図のように今回は円形の穴は設けていませんが、薄い形状であるため、表面、裏面からの熱損失を無視できず、その影響を含んだ方程式を設定する必要があります。なお熱伝導率  $\lambda$  は温度に依存しないものとします。

方程式上は  $h$  の項が 0 でなくなります。今の場合  $h < 0$  となり、単位体積当りの熱損失を表現することになります。厳密なことを言えば、熱損失は表面と裏面から

起るため、3次元オブジェクトとしてのモデル化を行い、 $z$  軸方向の法線微分について考えるべきなのですが、ここでは2次元のモデルで代用することにします。すなわちフォイルは十分に薄く、 $z$  軸方向の温度差はないものとします。換言するなら、放射は表面から起っているのではなく、体積全体から起っているものとするわけでは

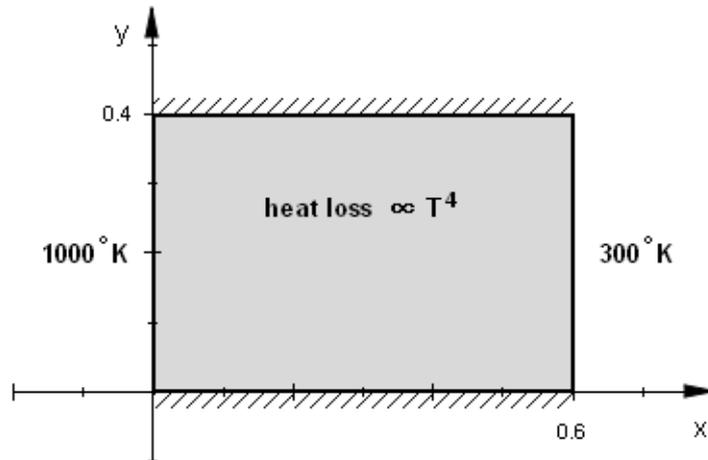
単位面積当りに放射される熱エネルギーを  $f$  とすると、

$$f = \varepsilon\sigma T^4$$

で与えられます。ここに  $\varepsilon$  は放射率 (emissivity)、 $\sigma$  は Stefan-Boltzmann 定数を意味します。フォイルは単位時間当りこの率で熱を失うわけですが、逆に周囲 (300°K と仮定) からの赤外線放射による熱吸収という側面も考慮する必要があります。従って以下のスクリプト中では

$$h = -2\varepsilon\sigma(T^4 - 300^4)/d$$

という設定を行っています。2 を乗じているのは表面と裏面双方を配慮してのことです。 $d$  はフォイルの厚さを意味し、それで割ることによって単位体積当りの熱損失が表現されます。



## 2.1 Problem descriptor [ htransfer01b.pde ]

基本形は htransfer01a.pde と変わりません。

```
TITLE
  'Foil Emitting IR Radiation'    { htransfer01b.pde }

SELECT
  Errlim = 1e-4

VARIABLES
  temp                               { Temperature }
```

放射率  $\varepsilon$  としては 0.3 を、Stefan-Boltzmann 定数  $\sigma$  としては  $5.67e-8$  という値を使用します。また偏微分方程式の左辺と右辺の値を別個に比較するために、equ1, equ2 というパラメータを定義しています。

```
DEFINITIONS
  Lx = 0.6  Ly = 0.4  d = 1e-3
  heat = -2*0.3*5.67e-8*(temp^4 - 300^4)/d
                                     { Heat source per unit volume }
  k = 45                               { Thermal conductivity of steel }
  fluxd_x = -k*dx(temp)  fluxd_y = -k*dy(temp)
  fluxd = vector(fluxd_x, fluxd_y)  fluxd_m = magnitude(fluxd)
  equ1 = div(fluxd)
  equ2 = heat
```

従属変数 temp の初期値を設定します。非線形の問題の場合には適切な初期値を設定することが望ましいわけですが、指定が省略された場合には 0 が仮定されます。

```
INITIAL VALUES
  temp = 600

EQUATIONS
  div(fluxd) = heat

BOUNDARIES
  Region 1
  Start(0,0)
  Natural(temp) = 0  Line to (Lx, 0)  { Insulated }
  Value(temp) = 300  Line to (Lx, Ly)
  Natural(temp) = 0  Line to (0, Ly)  { Insulated }
  Value(temp) = 1000 Line to Close
```

## PLOTS

```

Grid(x, y)
Contour(temp) Surface(temp)
Elevation(temp) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)
Elevation(heat) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)
Vector(fluxd) norm Contour(fluxd_m)
Contour(fluxd_x) Contour(fluxd_y)
Elevation(equ1, equ2) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)

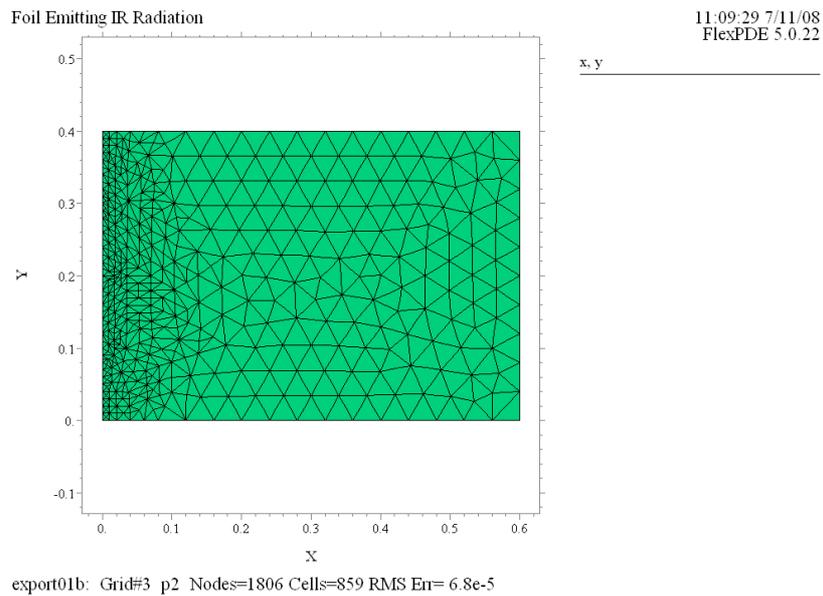
```

END

## 2.2 実行結果

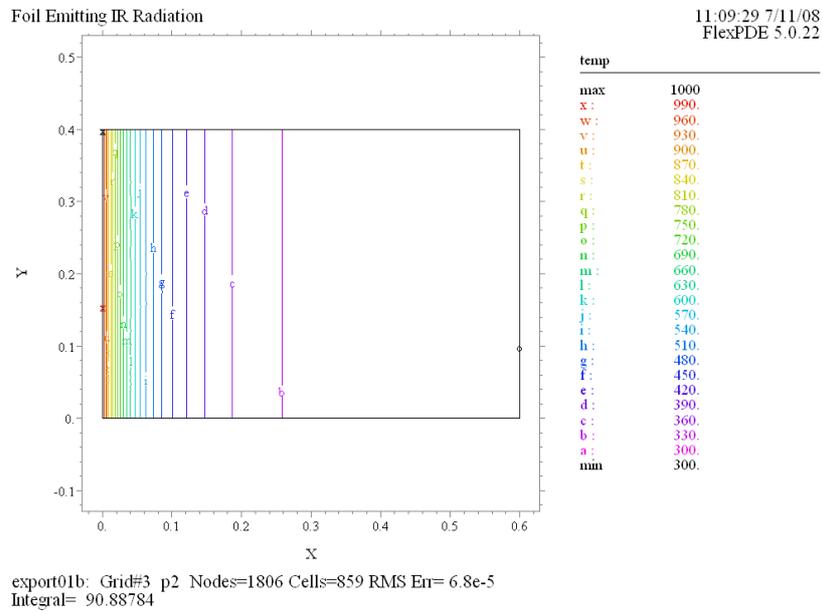
## (1) Grid(x, y)

メッシュ再構成が2度ほど行われた結果、左端の領域でのメッシュ密度が高くなっています。



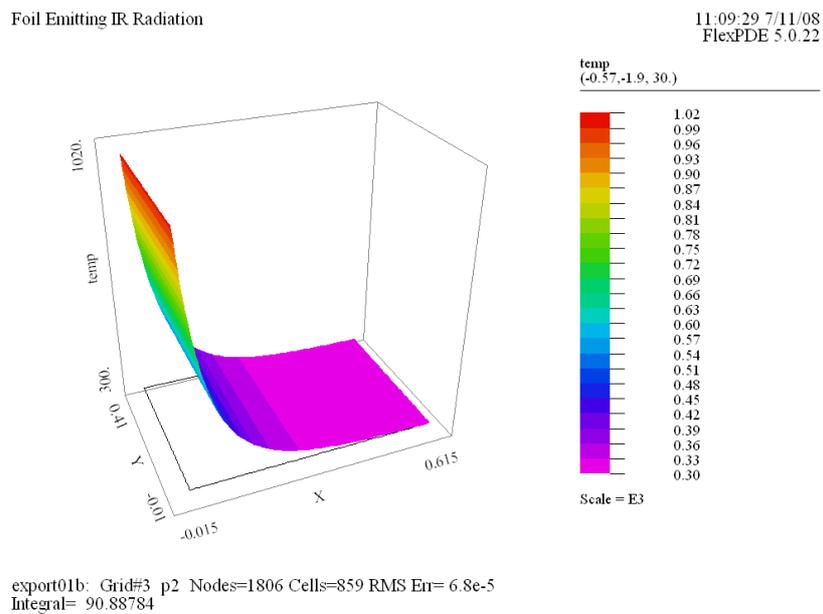
## (2) Contour(temp)

等温線をプロットしたものです。曲面の形状は次の surface プロットの方がわかりやすいでしょう。



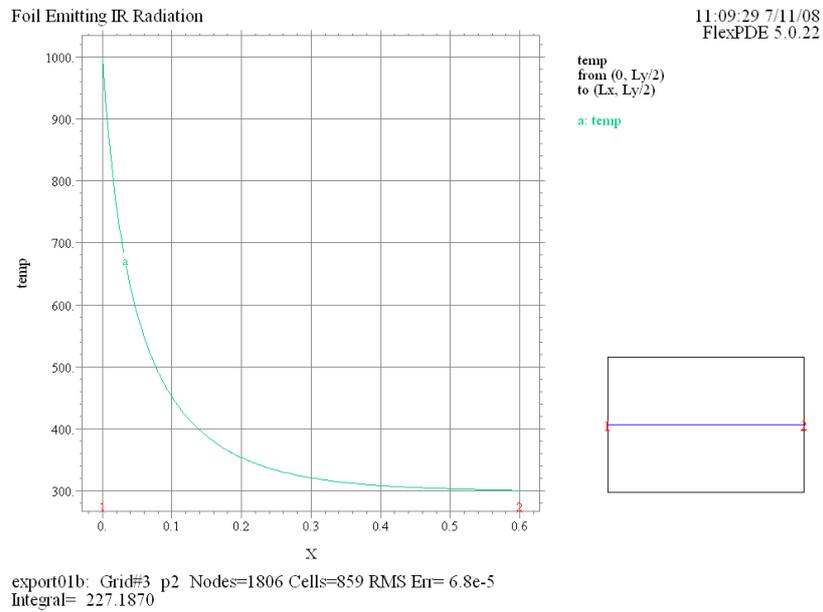
## (3) Surface(temp)

当然ですが熱損失があるため、温度が高い部分は左側境界に近い部分に限られます。



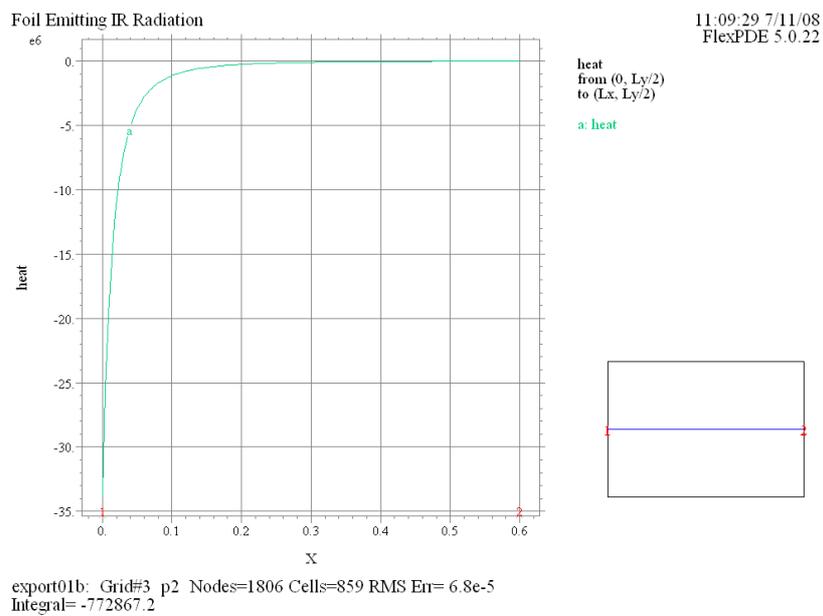
(4) Elevation(temp) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)

$y = 0.2$  という中心線に沿って温度の値をプロットしたものです。



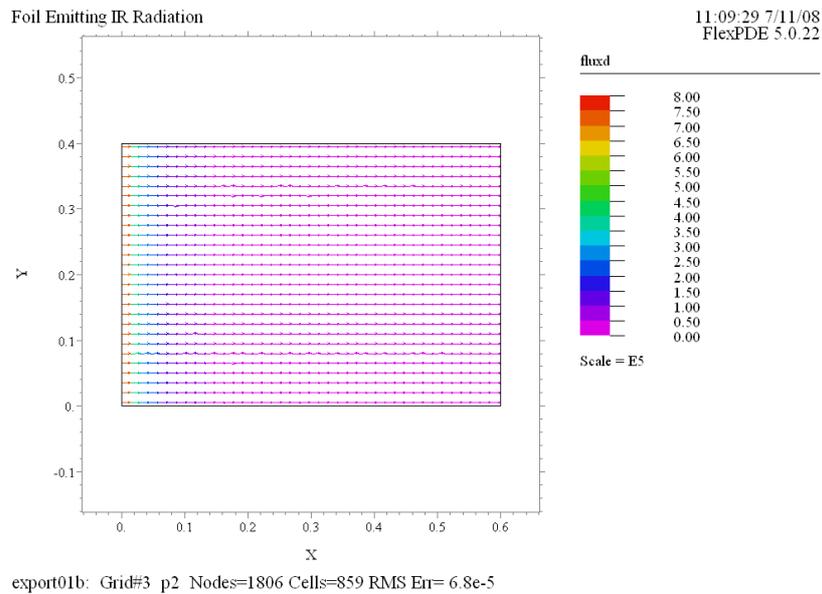
(5) Elevation(heat) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)

$y = 0.2$  という中心線に沿って熱損失の大きさをプロットしたものです。



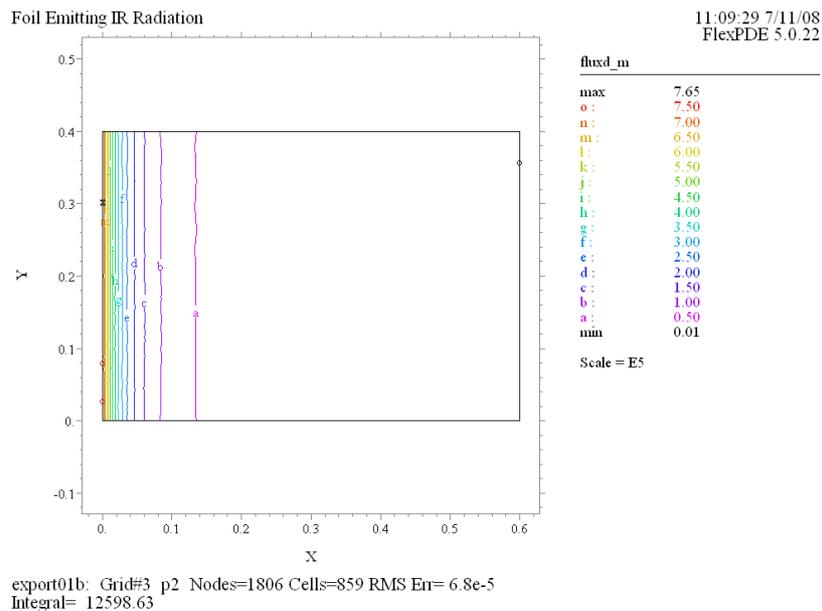
## (6) Vector(fluxd) norm

熱流束密度  $f$  のベクトルプロットを示したものです。norm を指定しているため矢印の長さは均一ですが、ベクトル長は色で識別できます。



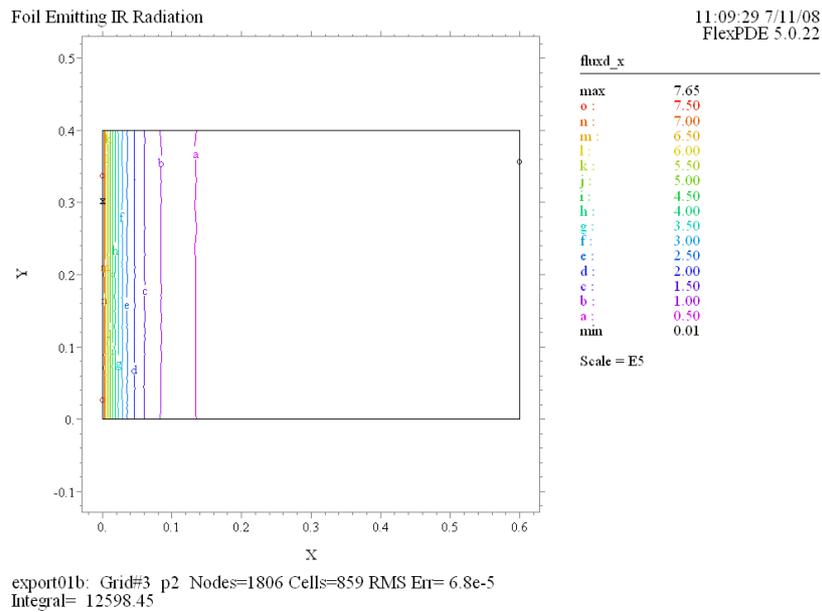
## (7) Contour(fluxd\_m)

熱流束密度  $f$  の絶対値に関する等高線図です。温度勾配のきつい左端の近傍で大きな値となっています。



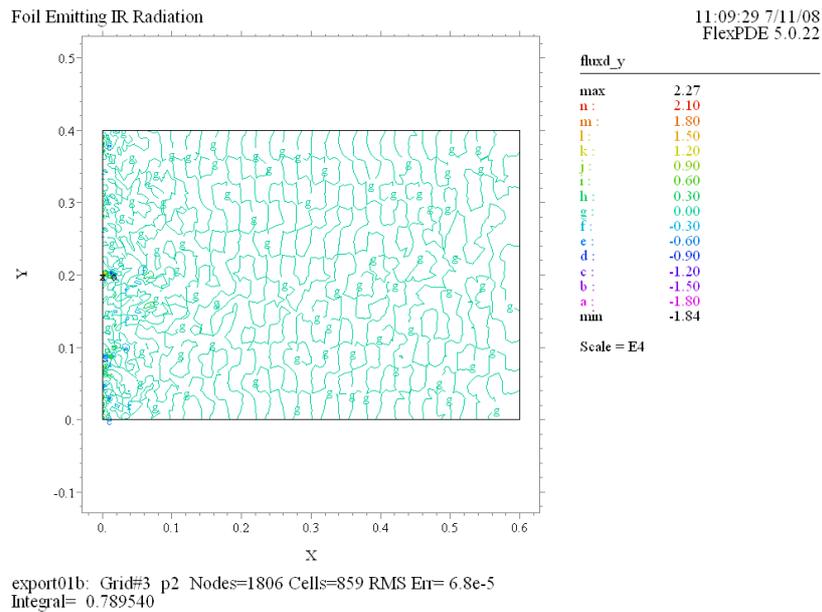
## (8) Contour(fluxd\_x)

熱流束密度  $f$  の  $x$  成分の値  $f_x$  に関する等高線図です。水平方向の流れであるため実質的に (7) の図と変わりません。



## (9) Contour(fluxd\_y)

熱流束密度  $f$  の  $y$  成分の値  $f_y$  に関する等高線図です。水平方向の流れであるためほぼ一様に 0 に近い値になっています。



(10) Elevation(equ1, equ2) from (0, Ly/2) to (Lx, Ly/2)

偏微分方程式の左辺  $\text{div}(\text{fluxd})$  の値 (equ1) と右辺  $\text{heat}$  の値 (equ2) を  $y = 0.2$  の線に沿って elevation プロットの形で示したものです。概ね良い一致を示していると言えます。左辺の equ1 は 2 階の導関数に基づくものであるため、区間別に定義された定数値として表現されています。

