

GB008: 2次元静磁場

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

マックスウェルの方程式の一つは

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

であるわけですが、静磁場ということでは単に

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2)$$

を考えれば良いことになります。ここに \mathbf{H} は磁場の強度、 \mathbf{J} は電流密度、 \mathbf{D} は電束密度を意味します。これを直交座標系での成分で表すと次のようになります。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

今、磁場として x 成分と y 成分のみを持つケースを考えることにすると J_x, J_y が消えて

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (4)$$

のみが残る形となります。一方、磁束密度を \mathbf{B} としたとき、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(x, y, z)$ を考えることができて

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表現できます。ただし (x, y) 平面に平行なベクトル場 \mathbf{H} と \mathbf{B} を考えようとしているわけですから、 A_x, A_y 共に 0 という条件が付く形となります。 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ に配慮すると (μ は透磁率) 数式 (5) から

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

が導かれます。この H_x, H_y を数式 (4) に代入すると A_z に関する 2 階の偏微分方程式

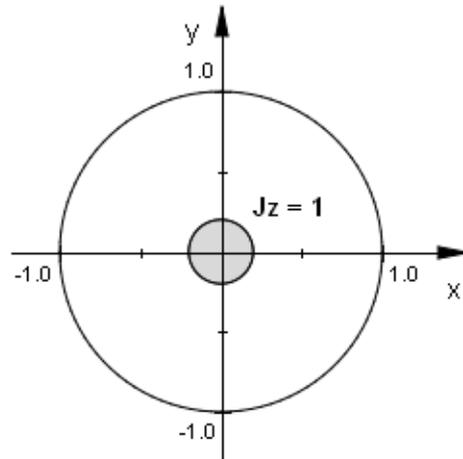
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_z \quad (7)$$

が導出されてきます。FlexPDE に対して指定する方程式はもちろん (7) の形でも良いのですが、DEFINITIONS セクションで (6) の関係を規定してやれば、EQUATIONS セクションで設定する方程式は (4) の形でも構いません。ポテンシャル A_z が求まればベクトル場 H と B は (6) によって算出できます。

1 Case1 - 電線周辺の磁場

右の図の灰色の円形は電線の垂直断面を表したものです。電流密度は一律で $J_z = 1$ としたときの磁場の様子を円形のドメイン上で計算してみます。ただし電線の長さは十分に長いものとします。また透磁率としては電線周囲、電線内（銅製）共に真空の透磁率 μ_0 を使用します。

この場合、電線の内外で厳密解が知られているため、FlexPDE による計算結果との対比も行うことにします。



1.1 Problem descriptor [magnetics01a.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
  'Field around a Wire'    { magnetics01a.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
  Errlim = 3e-4
```

従属変数としてはベクトルポテンシャル A の z 成分を使用します。

```
VARIABLES
Az { Magnetic vector potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を SI 単位系で定義します。なお、 B の x 成分、 y 成分は B_x , B_y と表記されている点に注意してください。これは予約語 `by` とのコンフリクトを避けるためです。

```
DEFINITIONS { SI units }
r0 = 0.2 r1 = 1.0
rad = sqrt(x^2 + y^2) { Radius }
mu0 = 4*PI*1e-7 { Permeability of vacuum }
mu = mu0 { Permeability }
Jz0 = 1.0 { Jz in wire }
B_x = dy(Az) B_y = -dx(Az)
B = Vector(B_x, B_y) Bm = magnitude(B)
{ Magnetic flux density }
Hx = B_x/mu Hy = B_y/mu H = B/mu Hm = Bm/mu
{ Magnetic field strength }
Jz { Declared only }
Bm_ex { Exact solution }
```

次に方程式を上記数式 (4) の形で定義します。

```
EQUATIONS
dx(Hy) - dy(Hx) = Jz { 2nd order PDE in Az }
```

境界の形状と境界条件を定義します。なお、上記パラメータ J_z , B_{m_ex} (厳密解) についてはリージョンごとに値を設定します。

```
BOUNDARIES
Region 1 Jz = 0
Bm_ex = mu*Jz0*r0^2/(2*rad)
Start 'outer' (-r1, 0)
Value(Az) = 0 Arc(Center = 0,0) Angle = 360

Region 'wire' Jz = Jz0
Bm_ex = mu*Jz0*rad/2
Start (-r0, 0) Arc(Center = 0,0) Angle = 360
```

ここで外周上で $\text{Value}(A_z) = 0$ という境界条件を与えた意味について補足しておきます。境界上でも $B = \nabla \times A$ という関係式は成り立っているわけですが、その成分表示式

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

において x 座標として接ベクトル t を、 y 座標として法線ベクトル n を取ることにすれば、

$$B_n = -\frac{\partial A_z}{\partial \tau}$$

という式が導かれます。ここに τ は接線方向の座標変数を意味します。今、外周上における A_z の値として定数値を設定したわけですが、このことは最後の式より $B_n = 0$ という条件を設定したことに等価であることがわかります。

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Elevation(normal(B)/Bm) on 'outer'
Surface(Az)
Vector(B) norm zoom(-2*r0, -2*r0, 4*r0, 4*r0)
Contour(Bm) Surface(Bm)
Contour(Bm_ex)
Contour(Bm - Bm_ex) Report(Globalmax(Bm))
Elevation(Bm, Bm_ex) from (-r1, 0) to (r1, 0)

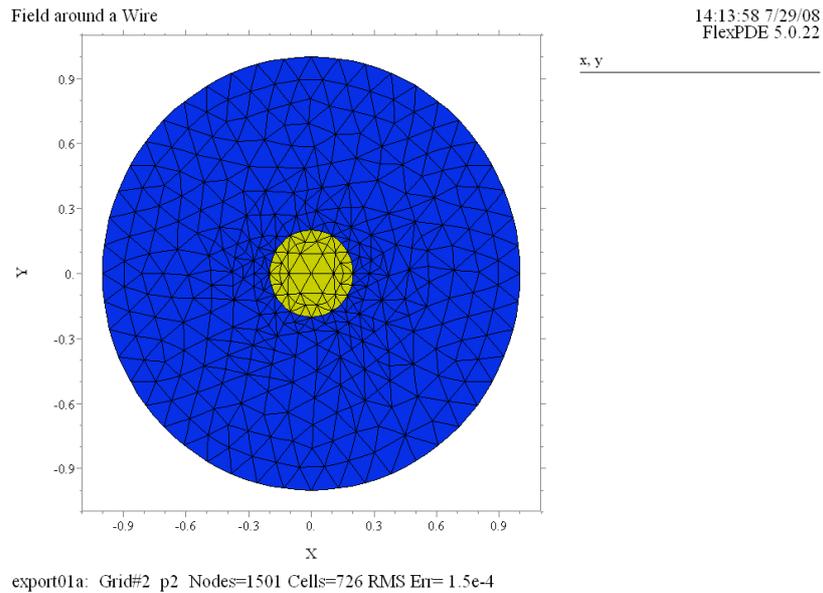
```

END

1.2 実行結果

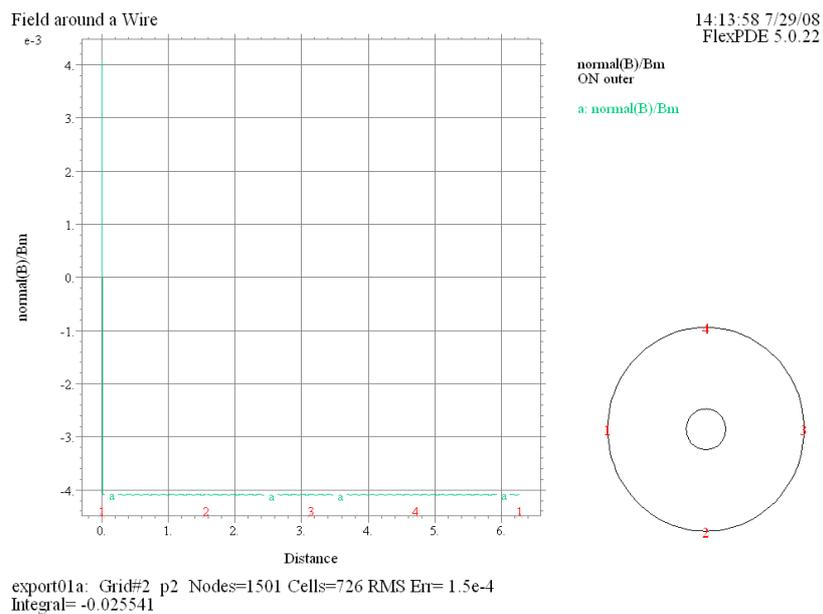
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は 1 回行われ、電線との境界周辺のメッシュが細分化されています。



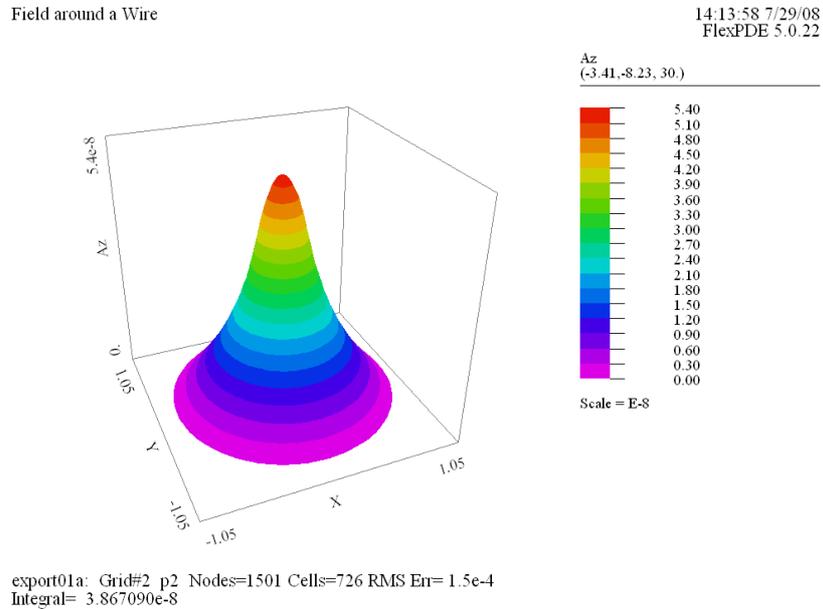
(2) Elevation(normal(B)/Bm) on 'outer'

外周上で磁束密度ベクトル B の法線成分が 0 に近い値になっていることを確認するためのプロットです。



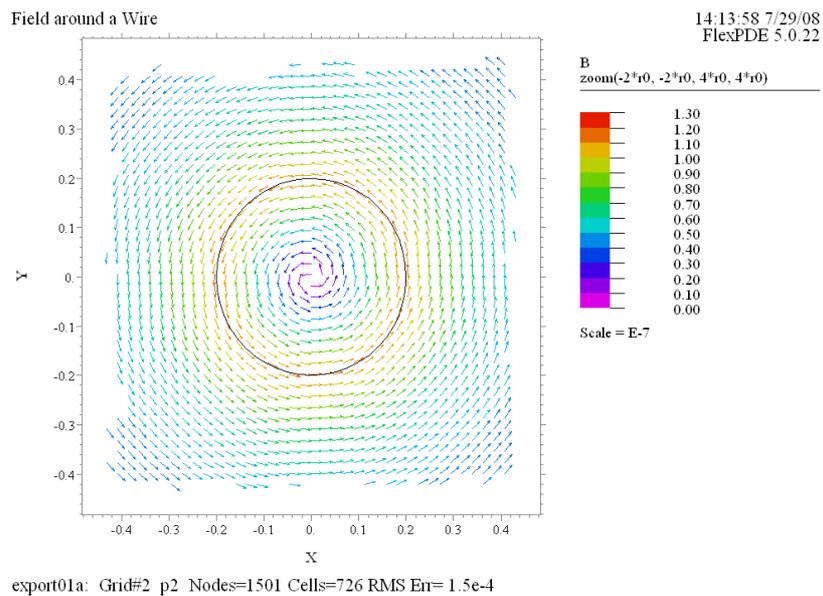
(3) Surface(Az)

ベクトルポテンシャル A_z の関数形を曲面図の形で表示したものです。



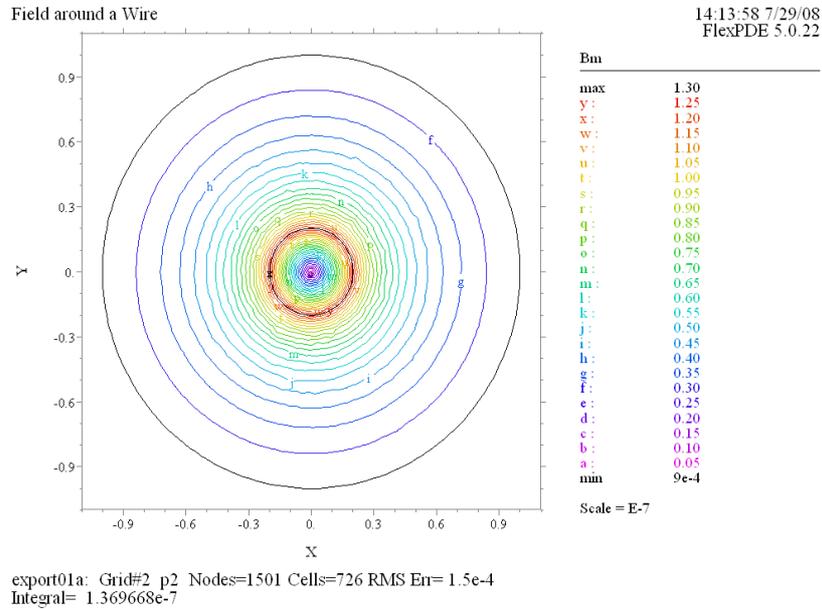
(4) Vector(B) norm zoom(-2*r0, -2*r0, 4*r0, 4*r0)

電線の近傍部分における磁束密度 B のベクトルプロットを示したものです。フィールドの向きはどこでも動径に直交する形となっています。またその強さは色で表現されていますが、電線の表面上で最大となっていることがわかります。



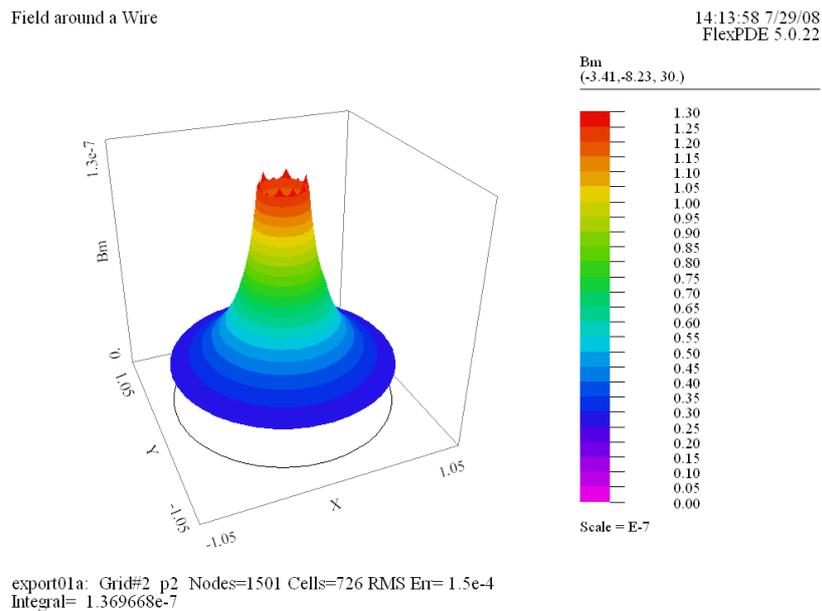
(5) Contour(Bm)

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線図です。電線表面上で最大となっています。



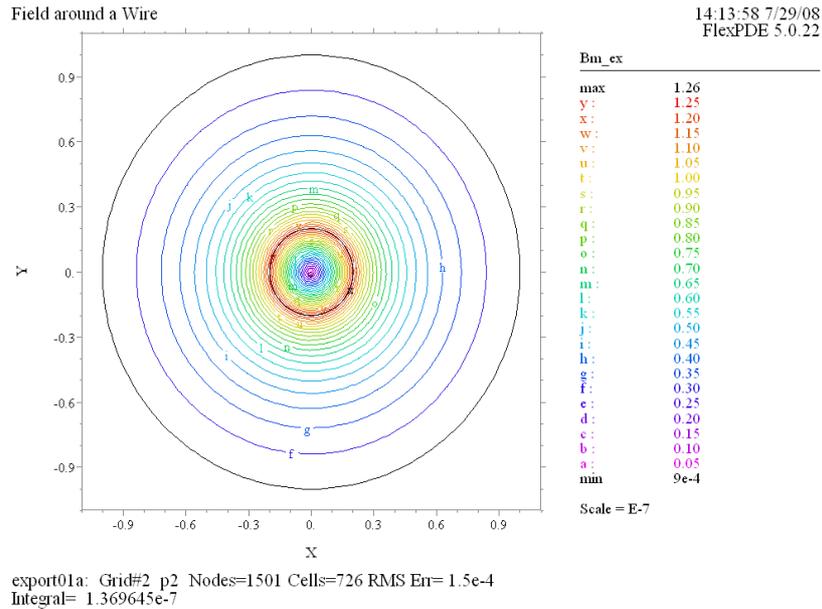
(6) Surface(Bm)

プロット (5) と同じ内容を曲面図の形で表示したものです。電線内部に逆円錐の形状の曲面が隠れているのですが、それについてはプロット (9) を参照ください。



(7) Contour(Bm_ex)

ここで考察している単純なケースについては厳密解が知られています。次の図は厳密解を与える数式をもとに磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線図を描いたものです。実質 (5) と変わりませんが、差分についてはプロット (8) も参照ください。



厳密解は電線内外の円周上で

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

という周回積分を行うことによって求められます (アンペールの法則)。電線外の場合は $I = J_{z0} \pi r_0^2$ に注意すると

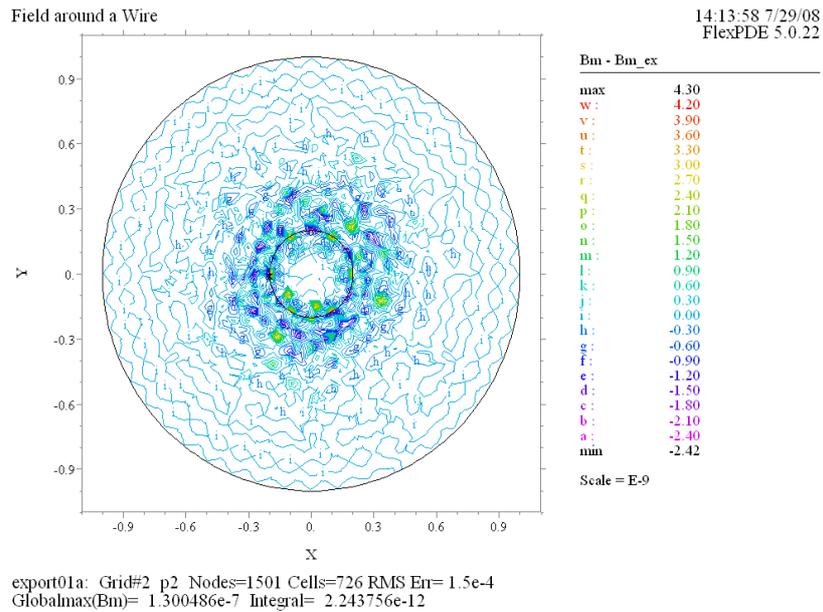
$$B_m = \frac{\mu_0 J_{z0} r_0^2}{2r} \quad (8)$$

が厳密解を与える数式となります。一方、電線内の点に対しては $I = J_{z0} \pi r^2$ という式を使わなくてはならないので、厳密解の数式は次のようになります。

$$B_m = \frac{\mu_0 J_{z0} r}{2} \quad (9)$$

(8) Contour(Bm - Bm_ex) Report(Globalmax(Bm))

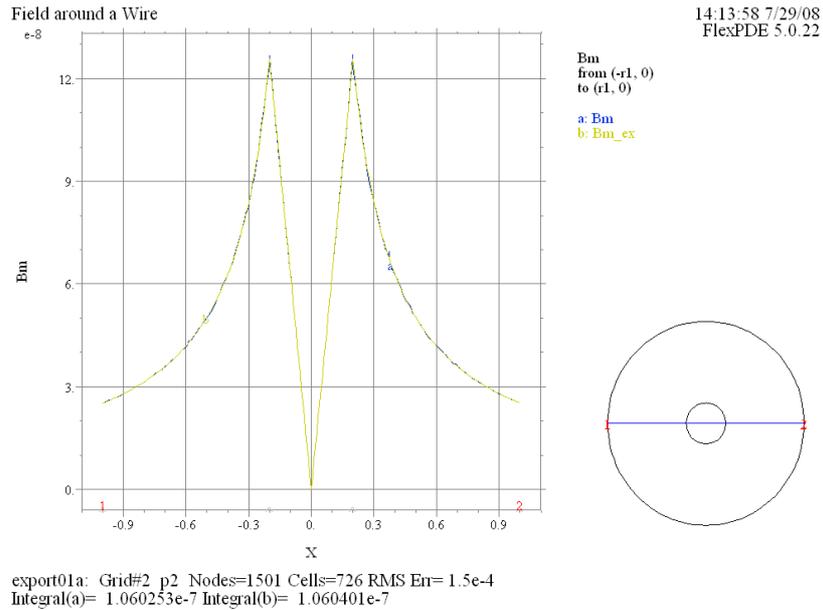
FlexPDE によって算出された B_m の値と理論値との差を等高線の形でプロットしたものです。 B_m の最大値は Report 文からの出力で $1.30e-7$ であることから、その相対誤差は $4.30e-9/1.30e-7$ 、すなわち 3.3% 以下におさまっていることがわかります。



SELECT セクションで指定した Errlim はポテンシャル A_z に対するものである点に注意。磁束密度ベクトル B は A_z に対する偏微分操作で得られるため、数値計算に伴う誤差は大きくなっても不思議ではありません。

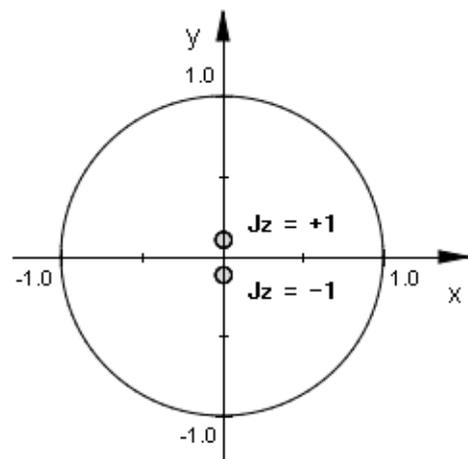
(9) Elevation(B_m , B_{m_ex}) from $(-r_1, 0)$ to $(r_1, 0)$

右下に示されている横断路に沿って B_m の値とその理論値とをプロットしたものです。2本の曲線が描かれているわけですが、実質重なってしまっているため、1本のグラフのように見えています。積分値にもほとんど差がありません。



2 Case2 - 2本の電線周辺の磁場

今度は電線が2本ある場合の磁場について考えます。電線は共に十分に長いとした上で、右図のように紙面(画面)に垂直方向逆向きに電流を流すものとします。電線の半径は $0.05m$ 、中心間の距離は $0.2m$ とします。またそれぞれの電線断面に対応するリージョンには 'upper' と 'lower' という名前を付けることにします。



2.1 Problem descriptor [magnetics01b.pde]

基本形は magnetics01a.pde と変わりません。

```
TITLE
  'Field around Two Wires'    { magnetics01b.pde }

SELECT
  Errlim = 3e-4

VARIABLES
  Az                          { Magnetic vector potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を SI 単位系で定義します。 J_z についてはリージョンごとに値を設定するので、ここでは名称のみを宣言しておきます。

```
DEFINITIONS                      { SI units }
  r0 = 0.05  d0 = 0.2  r1 = 1.0
  mu0 = 4*PI*1e-7                { Permeability of vacuum }
  mu = mu0                        { Permeability }
  Jz                               { Current density }
  B_x = dy(Az)  B_y = -dx(Az)
  B = Vector(B_x, B_y)  Bm = magnitude(B)
                               { Magnetic flux density }
  Hx = B_x/mu  Hy = B_y/mu  H = B/mu  Hm = Bm/mu
                               { Magnetic field strength }

EQUATIONS
  dx(Hy) - dy(Hx) = Jz          { 2nd order PDE in Az }
```

境界の形状と境界条件を定義します。なお、パラメータ J_z についてはリージョンごとに値を設定します。

```
BOUNDARIES
  Region 1  Jz = 0
    Start (-r1, 0) Value(Az) = 0
    Arc(Center = 0,0) Angle = 360

  Region 'lower'  Jz = -1.0
    Start (r0, -d0/2) Arc(Center = 0,-d0/2) Angle = 360

  Region 'upper'  Jz = +1.0
    Start (r0, d0/2) Arc(Center = 0,d0/2) Angle = 360
```

最後に出力すべき情報を規定します。

```

PLOTS
  Grid(x, y)
  Surface(Bm) Contour(Bm)
  Contour(Bm) log
  Contour(Bm) painted zoom(-d0, -d0, 2*d0, 2*d0)
  Elevation(Bm) from (0, -r1) to (0, r1)
  Vector(B) norm
  Vector(B) norm zoom(-d0, -d0, 2*d0, 2*d0)

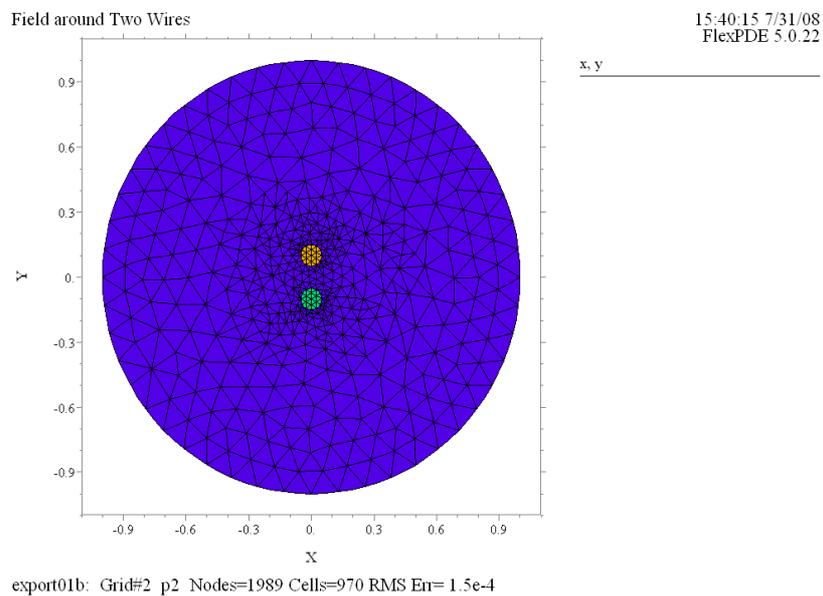
END

```

2.2 実行結果

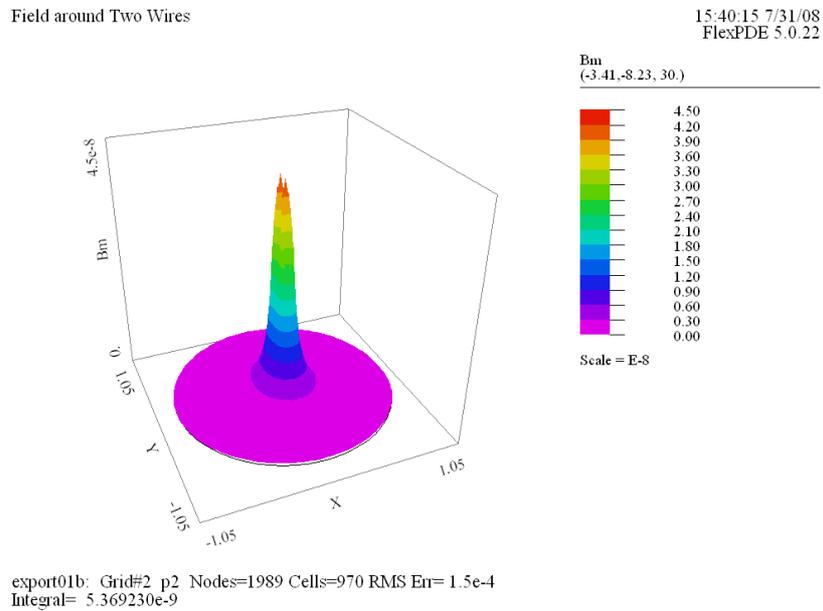
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は1回行われ、電線周囲とその内部のメッシュが細分化されています。



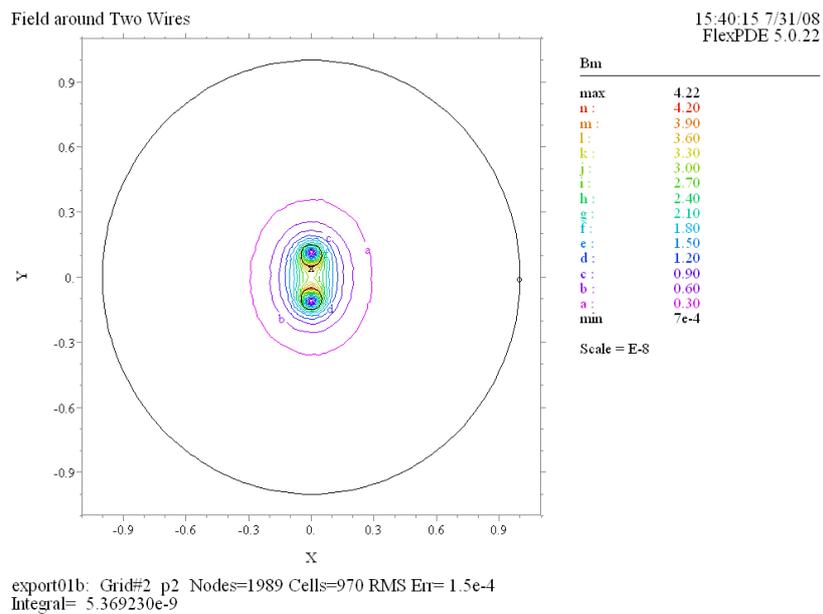
(2) Surface(Bm)

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する曲面図です。それぞれの電線に対応してピークは2つあります。



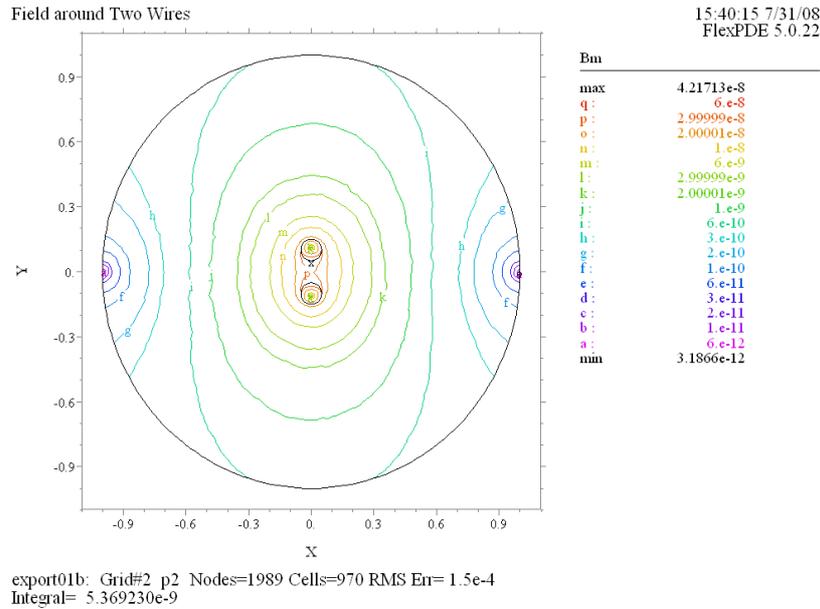
(3) Contour(Bm)

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線図です。



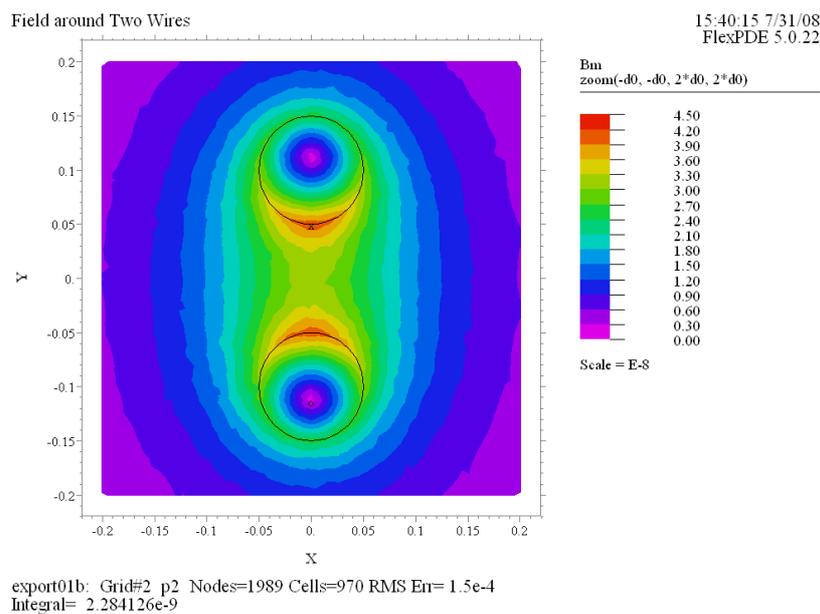
(4) Contour(Bm) log

プロット (3) と同じ等高線図ですが対数スケールで表示してあります。 B_m の値は外周上でほとんど 0 ではありますが、左右端と上下端とでは値がわずかに異なります。



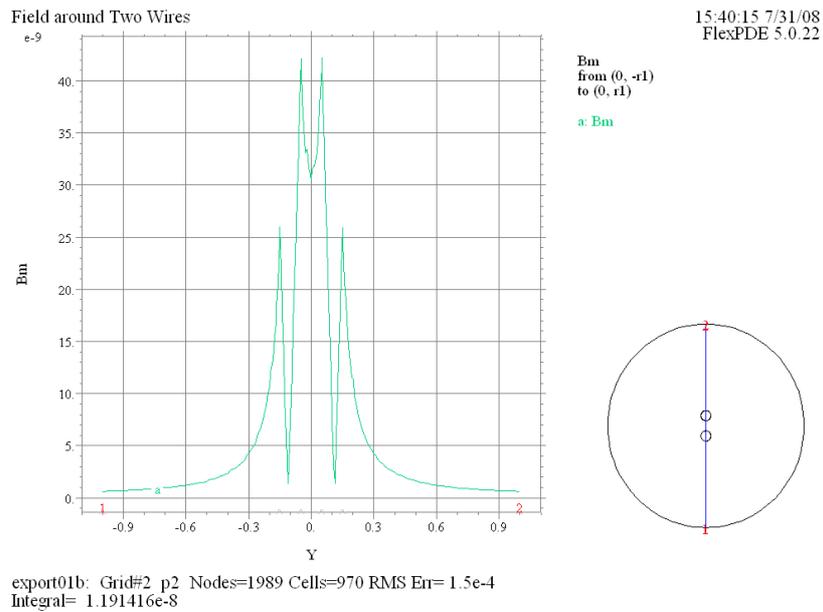
(5) Contour(Bm) painted zoom(-d0, -d0, 2*d0, 2*d0)

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線図のうち、電線の近傍だけを拡大し色塗りを実施した図です。向き合った電線の表層部に最大点があるのに対し、極小点は中心からややはずれた電線内部にあることがわかります。この B_m の値の変化は次の elevation プロットにより明確に示されています。



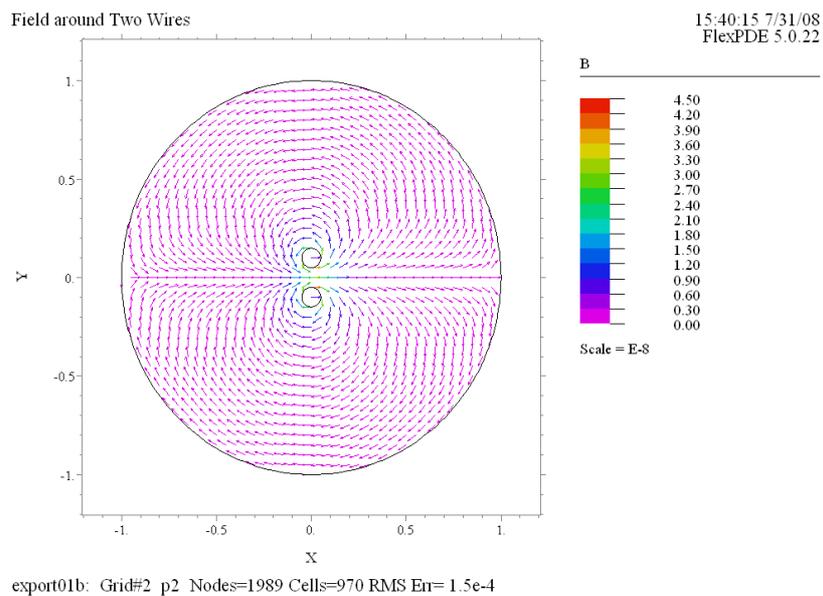
(6) Elevation(Bm) from (0, -r1) to (0, r1)

磁束密度ベクトル B の絶対値が y 軸上でどう変化しているかをプロットしたものです。極大点は電線表面上にあります。



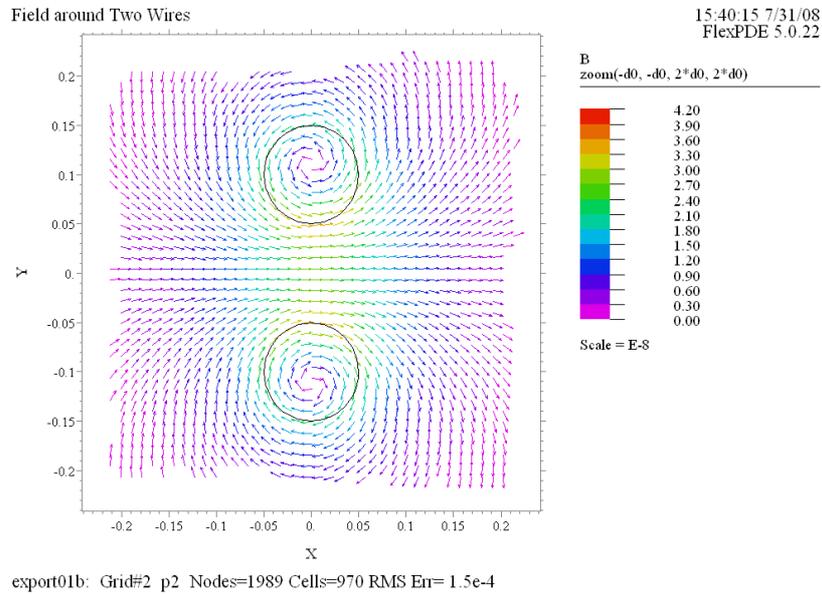
(7) Vector(B) norm

磁束密度 B のベクトルプロットです。



(8) Vector(B) norm zoom(-d0, -d0, 2*d0, 2*d0)

プロット (7) と同じベクトルプロットですが、電線の近傍だけを拡大して表示したものです。



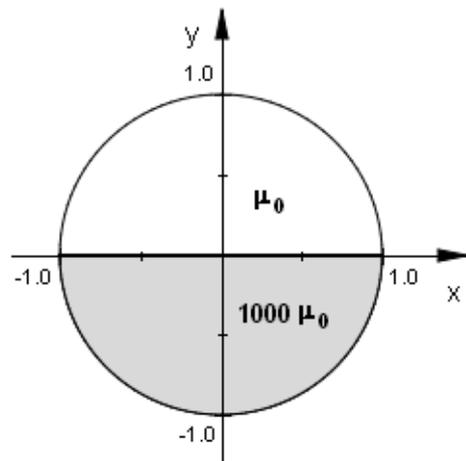
依然簡単な問題のように見えるかも知れませんが、解析解を求めることは容易なことではありません。

3 Case3 - 磁石表面での境界条件

今度は透磁率が $1000\mu_0$ の磁石が真空中に置かれているとき、その境界面で磁場ベクトル H, B がどう変化するかについて考察してみましょう。解析対象のドメインとしては右図のような単位円を想定します。これはやや天下りのですが、外周上で

$$A_z = x + y$$

という境界条件をベクトルポテンシャル A_z に課し、計算を実行することにします。



3.1 Problem descriptor [magnetics01c.pde]

基本形は magnetics01a.pde と変わりません。

```
TITLE
  'Boundary Conditions for H and B'    { magnetics01c.pde }

SELECT
  Errlim = 1e-5

VARIABLES
  Az                                     { Magnetic vector potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を SI 単位系で定義します。 μ についてはリージョンごとに値を設定するので、ここでは名称のみを宣言しておきます。

```
DEFINITIONS                                { SI units }
  r1 = 1.0
  mu0 = 4*PI*1e-7                          { Permeability of vacuum }
  mu                                       { Permeability }
  Jz = 0                                    { Current density }
  B_x = dy(Az)  B_y = -dx(Az)
  B = Vector(B_x, B_y)  Bm = magnitude(B)
                                     { Magnetic flux density }
  Hx = B_x/mu  Hy = B_y/mu  H = B/mu  Hm = Bm/mu
                                     { Magnetic field strength }

EQUATIONS
  dx(Hy) - dy(Hx) = Jz    { 2nd order PDE in Az }
```

境界の形状と境界条件を定義します。なお、パラメータ μ についてはリージョンごとに値を設定します。Feature として定義された境界線は elevation プロット中で使用されます。

```
BOUNDARIES
  Region 'domain'  mu = mu0
    Start (-r1, 0) Value(Az) = x + y
    Arc(Center = 0,0) Angle = 360

  Region 'magnet'  mu = 1000*mu0
    Start (-r1, 0) Arc(Center = 0,0) Angle = 180 Line to Close
```

Feature

```
Start 'interface' (-0.9*r1, 0) Line to (0.9*r1, 0)
```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```
Grid(x, y)
Contour(Hx) painted Contour(Hy) painted
Contour(B.x) painted Contour(B.y) painted
Elevation(B.x) on 'interface' on Region 'magnet'
Elevation(B.x) on 'interface' on Region 'domain'
Elevation(B.y) on 'interface' on Region 'magnet'
Elevation(B.y) on 'interface' on Region 'domain'
```

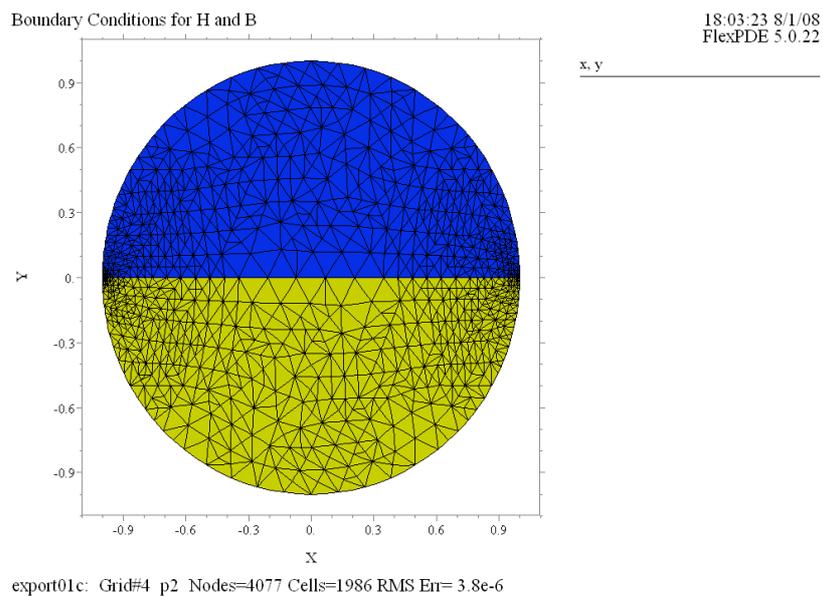
```
END
```

3.2 実行結果

Max Error = $1.386e-5$ という実行結果から判断して、境界上で $x + y$ と定義したポテンシャル関数が求める解に対応していることがわかります。

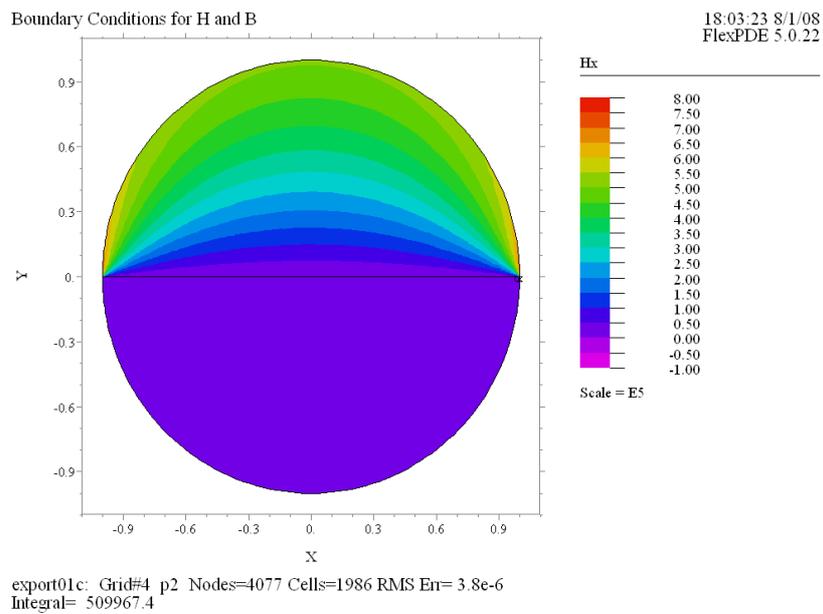
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は 3 回行われています。



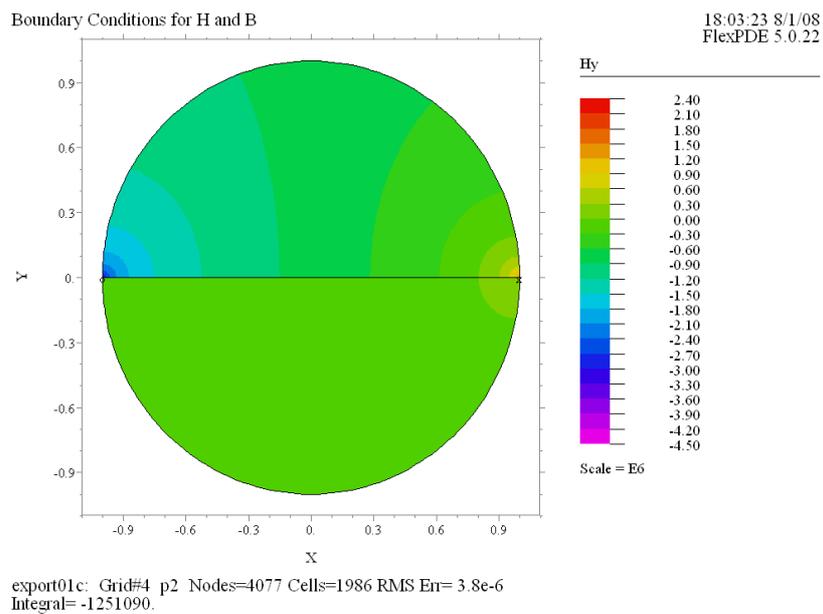
(2) Contour(Hx) painted

磁場の強度 H の x 成分の値に関する等高線図です。磁石の境界面をはさんで連続に変化していることがわかります。



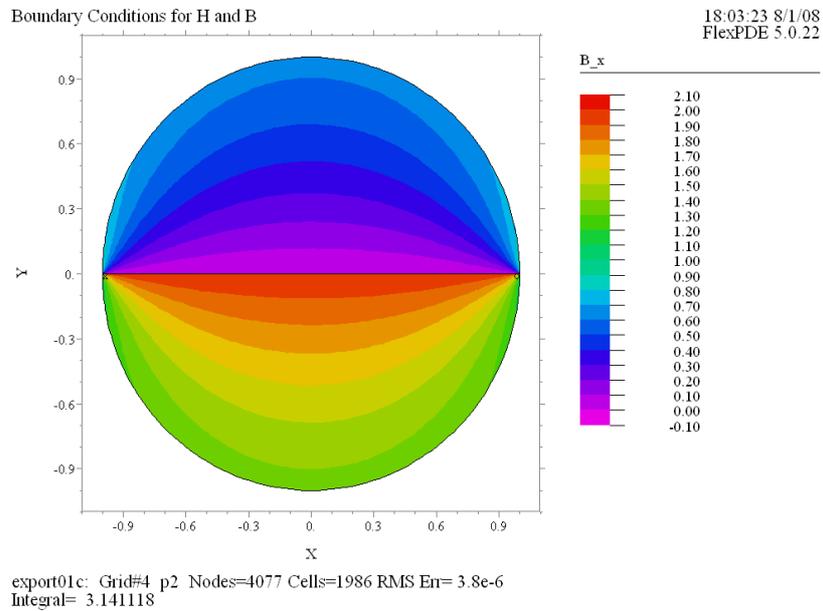
(3) Contour(Hy) painted

磁場の強度 H の y 成分の値に関する等高線図です。磁石の境界面をはさんで不連続となっています。



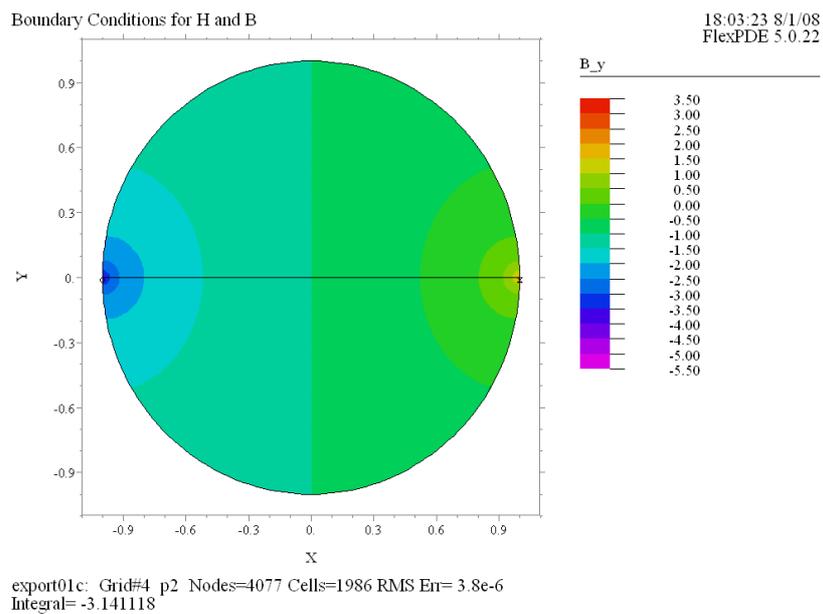
(4) Contour(B_x) painted

磁束密度ベクトル B の x 成分の値に関する等高線図です。磁石の境界面をはさんで不連続となっています。



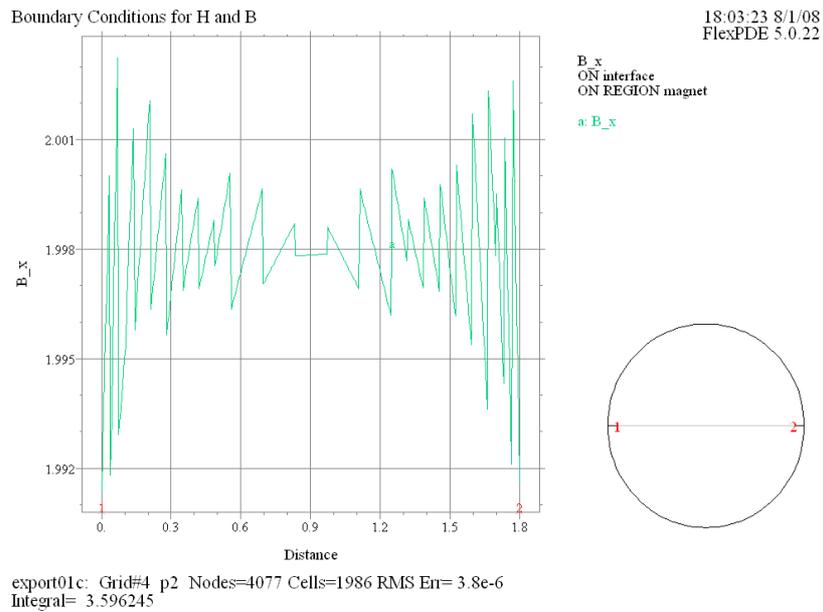
(5) Contour(B_y) painted

磁束密度ベクトル B の y 成分の値に関する等高線図です。磁石の境界面をはさんで連続に変化していることがわかります。

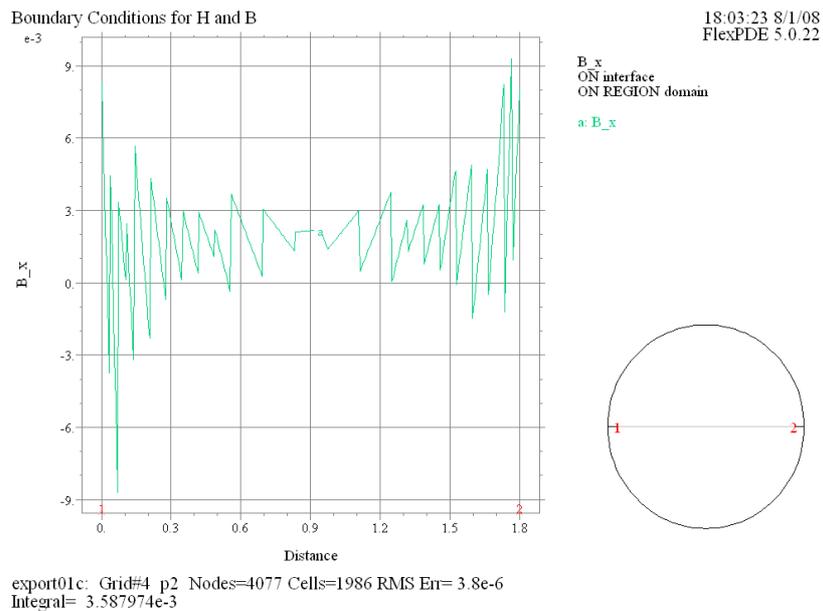


(6) Elevation(B_x) on 'interface' on Region 'magnet'

'interface' 上における B_x の値の変化を磁石側でプロットしたものです。次のプロットと形状はやや似てはいますがスケールは全く異なります。 B_x が境界の両側で不連続に変化していることを示すものです。

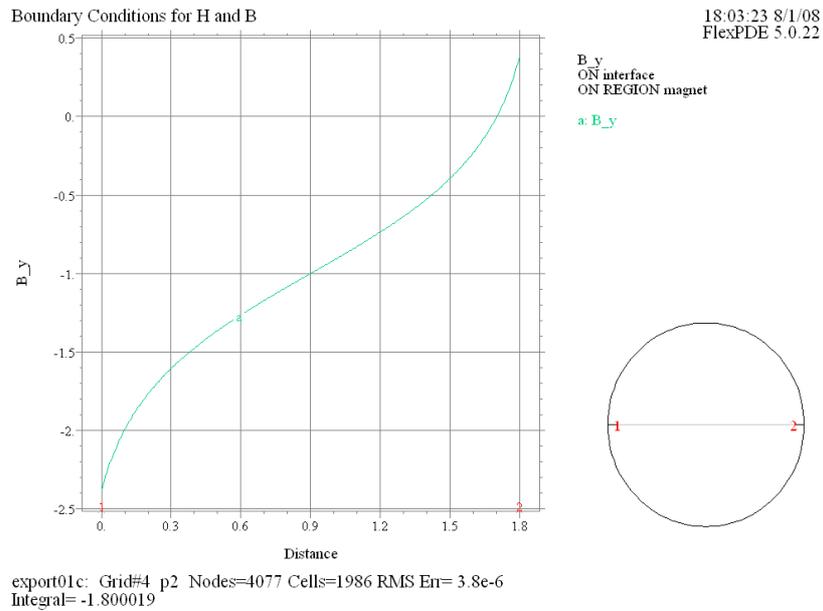
(7) Elevation(B_x) on 'interface' on Region 'domain'

'interface' 上における B_x の値の変化を真空側でプロットしたものです。

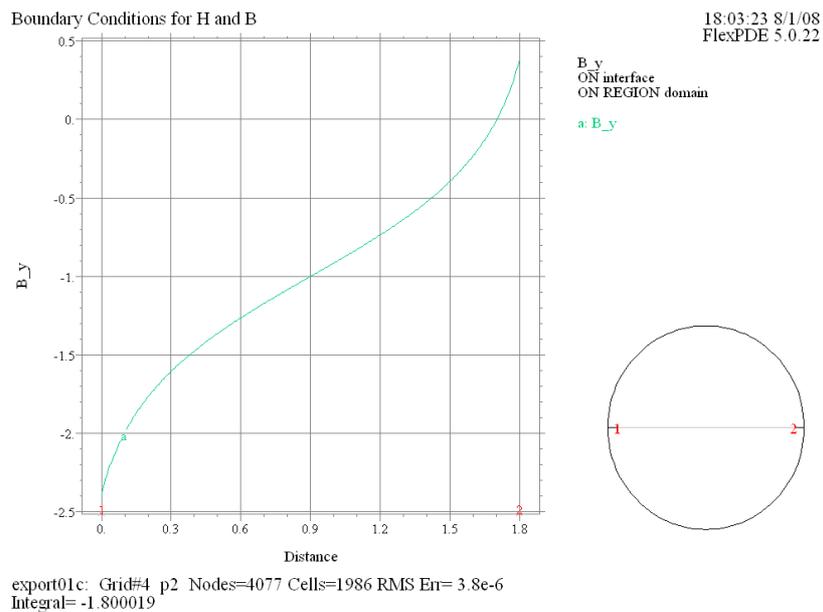


(8) Elevation(B_y) on 'interface' on Region 'magnet'

'interface' 上における B_y の値の変化を磁石側でプロットしたものです。次のプロットとの一致が見られ、境界をはさんで B_y の値が連続的に変化していることを示しています。

(9) Elevation(B_y) on 'interface' on Region 'domain'

'interface' 上における B_y の値の変化を真空側でプロットしたものです。



4 Case4 - 永久磁石のモデル

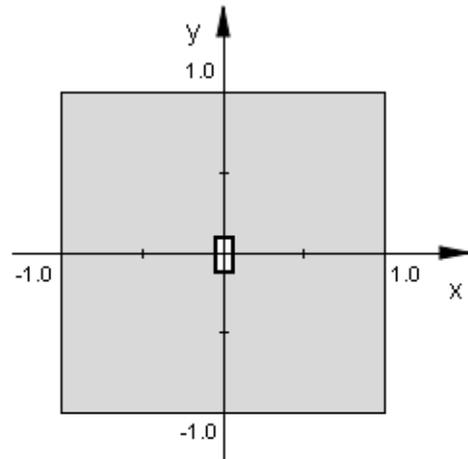
ここでは右図のような棒磁石のまわりの磁場について調べることにします。棒磁石の幅は $0.1m$ 、長さは $0.2m$ とし、 y 軸方向に磁化されているものとします。棒磁石の両端において B_y の値は一定 ($+0.1, -0.1$)、側面においては $B_x = 0$ という境界条件を想定します。ただし数式 (6)、すなわち

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考慮するなら、境界上で

$$A_z = -B_0 x \quad (B_0 = 0.1)$$

と指定することで上記境界条件が表現されることがわかります。



4.1 Problem descriptor [magnetics01d.pde]

Case1 で作成した magnetics01a.pde をベースにスクリプトを用意します。

```
TITLE
  'Field around a Permanent Magnet'    { magnetics01d.pde }

SELECT
  Errlim = 3e-4

VARIABLES
  Az                                     { Magnetic vector potential }
```

偏微分方程式の定義に先立ち、パラメータ類を SI 単位系で定義します。

```

DEFINITIONS                                { SI units }
L = 1.0  L0 = 0.05
mu0 = 4*PI*1e-7                            { Permeability of vacuum }
mu = mu0                                    { Permeability }
Jz = 0                                       { Current density }
B0 = 0.1                                    { Magnetic induction }
B_x = dy(Az)  B_y = -dx(Az)
B = Vector(B_x, B_y)  Bm = magnitude(B)
                                           { Magnetic flux density }
Hx = B_x/mu  Hy = B_y/mu  H = B/mu  Hm = Bm/mu
                                           { Magnetic field strength }

EQUATIONS
dx(Hy) - dy(Hx) = Jz                        { 2nd order PDE in Az }

```

境界の形状と境界条件を定義します。なお、磁石内部は解析対象ドメインから除外します。また外部境界上では $A_z = 0$ という条件を設定します。

```

BOUNDARIES
Region 1
Start 'outer' (-L, -L) Value(Az) = 0
Line to (L, -L) to (L, L) to (-L, L) to Close

Start 'magnet' (-L0, -2*L0) { Exclude }
Value(Az) = -B0*x
Line to (L0, -2*L0) to (L0, 2*L0) to (-L0, 2*L0) to Close

```

最後に出力すべき情報を規定します。

```

PLOTS
Grid(x, y)
Elevation(Az) on 'magnet' { Verify Az on inner boundary }
Elevation(normal(B)) on 'magnet'
Contour(Bm) log
Contour(Bm) painted zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)
Surface(Bm) zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)
Vector(B) norm
Vector(B) norm zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)

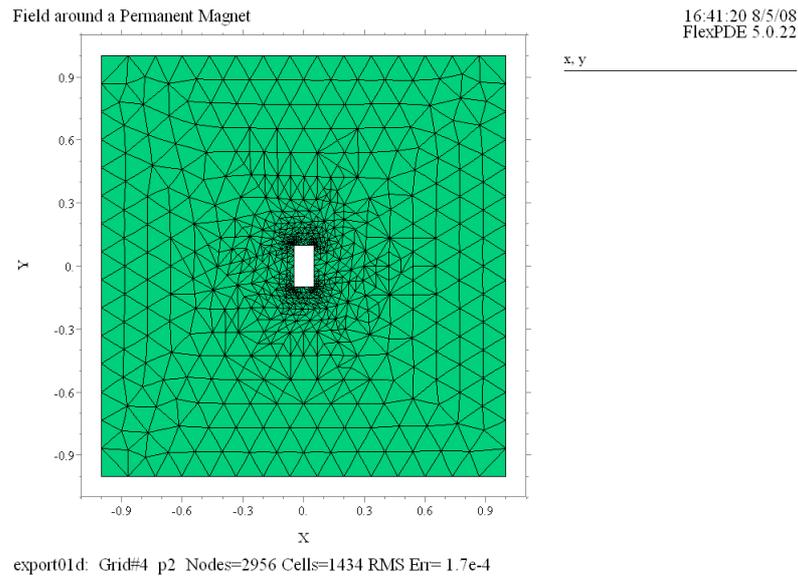
END

```

4.2 実行結果

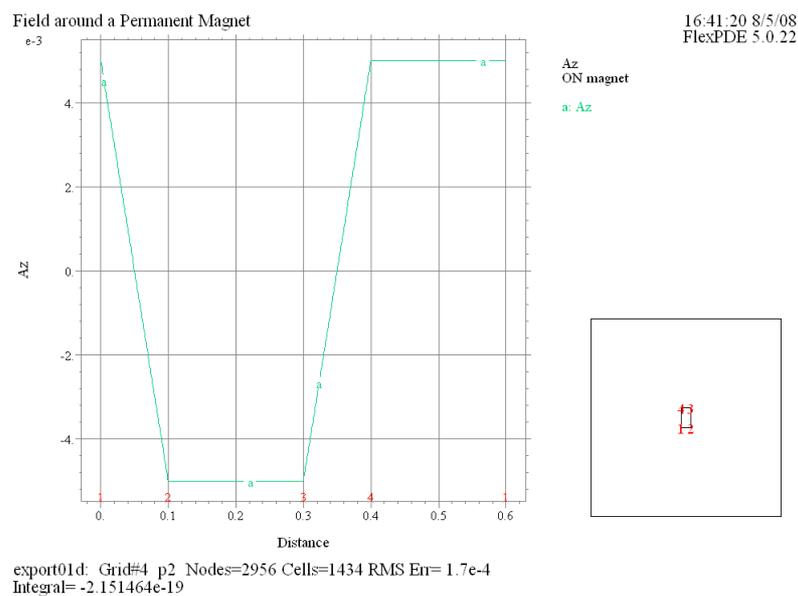
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は 4 回行われ、磁石周辺のメッシュ密度がかなり細かいものになっていることがわかります。



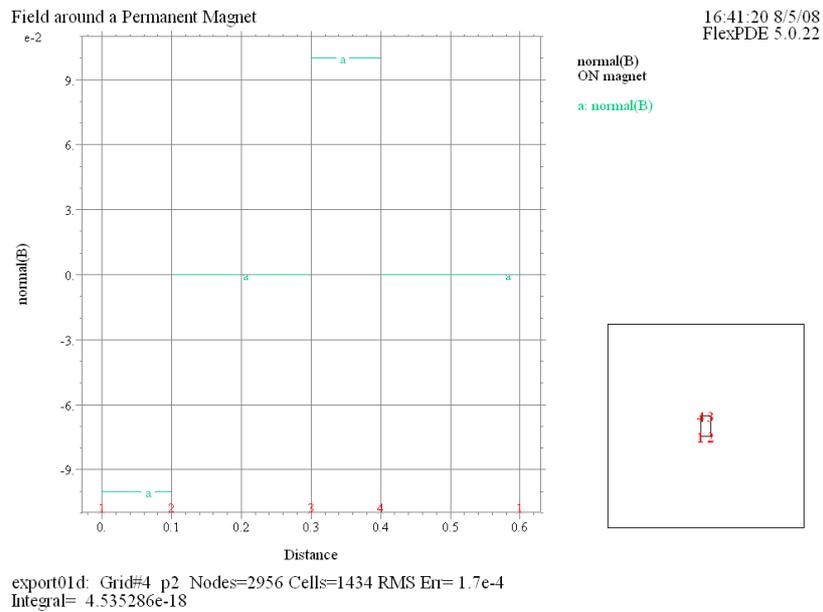
(2) Elevation(Az) on 'magnet'

棒磁石の境界上で A_z の値が企図した設定値になっているかどうかをチェックするための elevation プロットです。



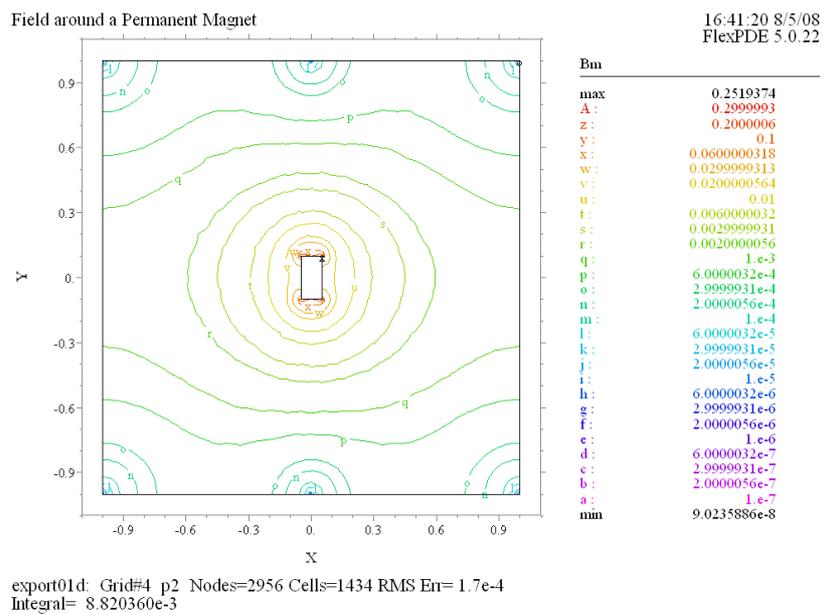
(3) Elevation(normal(B)) on 'magnet'

磁石境界線上で磁束密度ベクトル B の法線成分の値をプロットしたものです。企図した通りの設定となっていることがわかります。



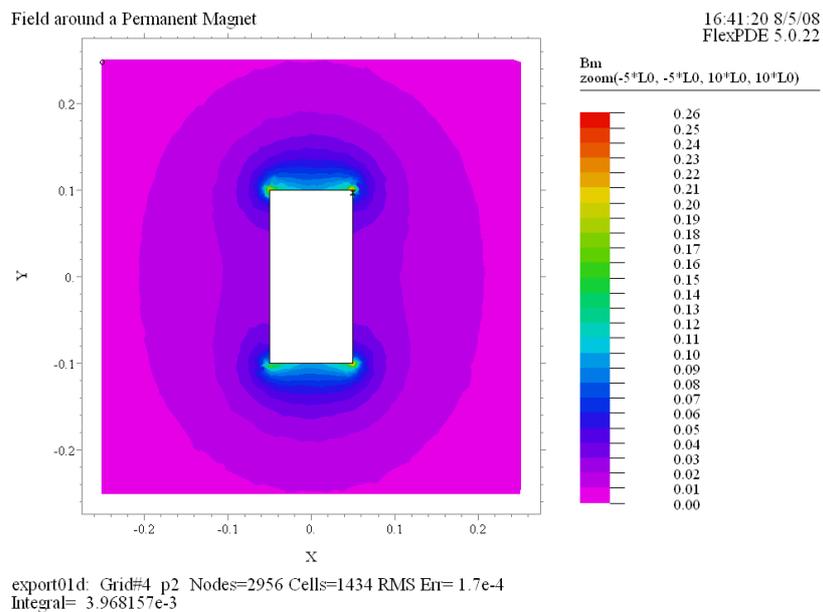
(4) Contour(Bm) log

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線を対数スケールでプロットしたものです。



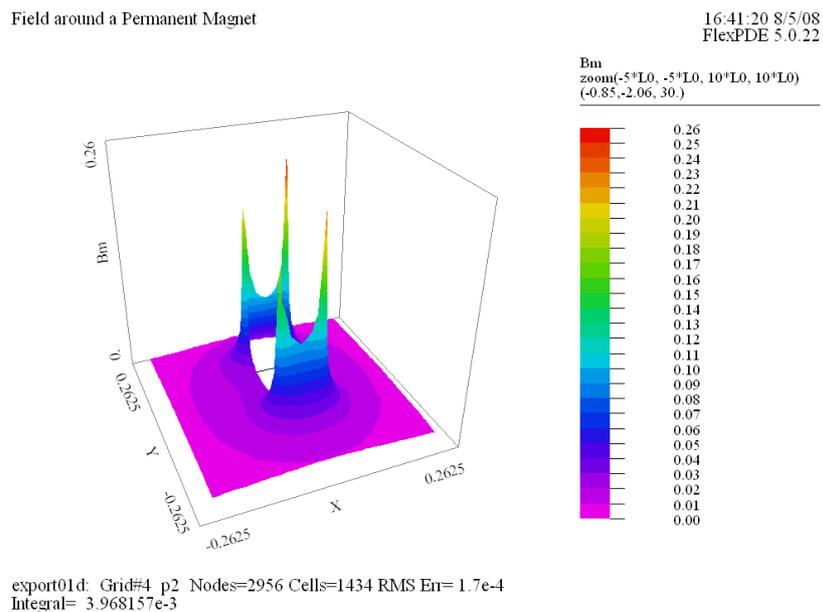
(5) Contour(Bm) painted zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)

磁束密度ベクトル B の絶対値に関する等高線プロットのうち、磁石の近傍部分のみを拡大して示したものです。



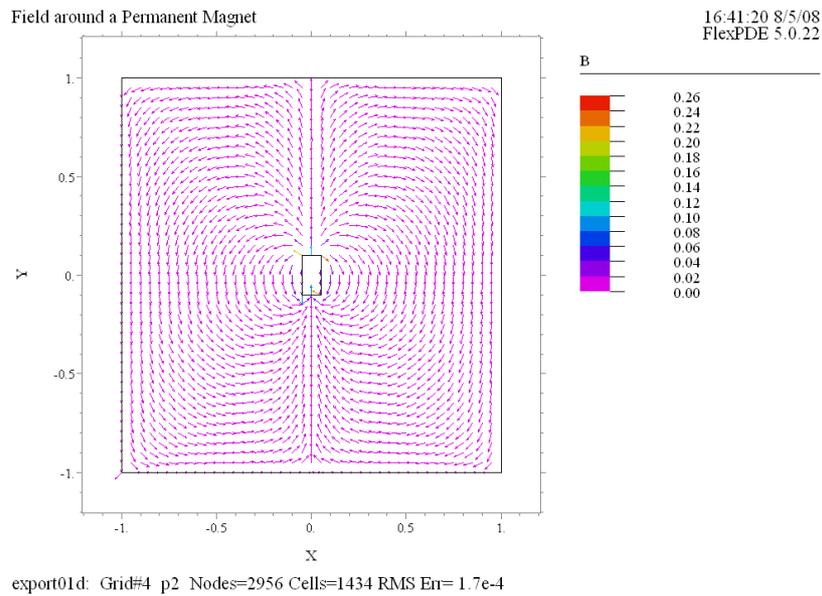
(6) Surface(Bm) zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)

プロット (5) と同じ内容ですが、曲面図の形で表示したものです。磁石の 4 隅におけるピークの存在が明確に示されています。



(7) Vector(B) norm

磁束密度ベクトル B のベクトル場をプロットしたものです。外周上で $A_z = 0$ という条件を設定しているため、外周上での法線成分 B_n は 0 となっています (Case1 参照)。



(8) Vector(B) norm zoom(-5*L0, -5*L0, 10*L0, 10*L0)

プロット (7) のベクトル場のうち、磁石近傍のみを拡大表示したものです。

