

GB011: 2次元の完全流体

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

2次元における流体の流れを分析するに際し、ここでは

- 非圧縮性の完全流体（粘性がない流体）
- 渦を持たない流れ

という理想的なケースを想定することにします。この場合には流れはポテンシャル流れとなり、速度ベクトルはスカラーのポテンシャル関数 ϕ を用いて

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1)$$

のように表現することができます。一方、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

(ρ は密度、 \mathbf{v} は速度ベクトル) は非圧縮性流体の場合、 $\rho = \text{一定}$ となるため、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

に帰着されます。従って (1) を (3) に代入することによって次のラプラス方程式を得ることができます。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

この型の流れの場合、渦ベクトル ω の z 成分を計算してみると

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$$

となることから渦は存在しないことがわかります。一方、独立変数 p (圧力) についてはエネルギー保存則に相当するベルヌーイの定理

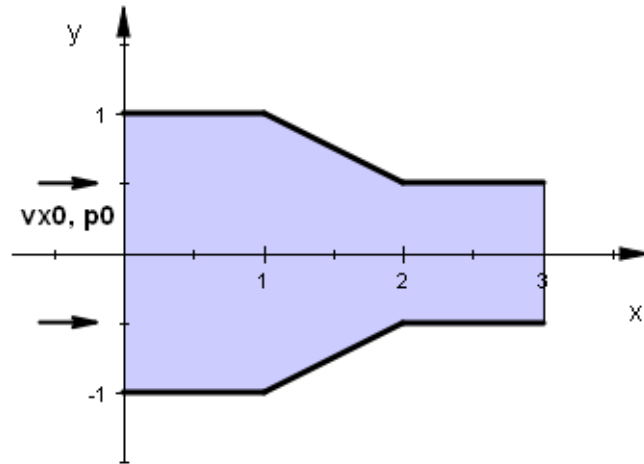
$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (5)$$

を使って算出することができます。ただし数式 (5) では重力の働く方向を z 軸方向と仮定しています。

1 Case1 - くびれのあるチャンネルにおける流れ

ここでは右図のように先で太さが狭まったチャンネルにおける水平な流れを分析します。重力の働く方向は z 軸方向であり、ここで解析対象とする 2 次元の流れには影響が及ばないため、ベルヌーイの定理における gz の項は無視します。

一方、方程式 (4) と (5) は連立させる必要はないため、EQUATIONS セクションで指定するのは (4) のみとし、圧力 p を計算する数式は DEFINITIONS セクション中に記述するというアプローチを取ります。



境界条件としてはチャンネル左端 $x = 0$ における x 方向の流速 $vx0 = 3.0$ と圧力 $p0 = 1e5$ を規定します (単位は SI 系)。従属変数が ϕ であることから境界条件の記述の中での $vx0$ の指定には Natural 文が使用されることとなります。一方 $x = 3$ におけるチャンネル右端においては Value 文により $\phi = 0$ という定数値を指定しています。定数値としては別に 0 でなくても良いわけですが、これによってこの境界上で

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

が保証されることになる点に注意してください。その他の境界上では Natural ($\phi=0$) という設定になります。

1.1 Problem descriptor [pfluid01a.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Flow through a Constricted Channel'    { pfluid01a.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
Errlim = 1e-5
```

従属変数を定義します。ポテンシャル流れの場合には一つのスカラー変数 (速度ポテンシャル) のみによって流れがすべて規定されます。

```
VARIABLES
phi    { Velocity potential }
```

関連するパラメータや数式を定義します。単位としては SI 単位系を使用します。 p に関する数式は数式 (5) に基づくものですが、2 次元の流れなので gz の項は無視できます。 $\text{div}(v)$, $\text{curl}(v)$ という数式は検証用に設定しています。

```

DEFINITIONS                                { SI units }
  Lx = 1  Ly = 1
  coef = 0.5                                { Constriction coefficient }
  vx0 = 3.0                                  { Velocity at input end }
  p0 = 1e5                                    { Atmospheric pressure }
  dens = 1e3                                  { Mass density }
  vx = dx(phi)  vy = dy(phi)                 { Velocity components }
  v = vector(vx, vy)  vm = sqrt(vx^2 + vy^2) { Speed }
  p = p0 + 1/2*dens*(vx0^2 - vm^2)           { Pressure }
  div_v = dx(vx) + dy(vy)                   { Divergence, or div(v) }
  curl_z = dx(vy) - dy(vx)                  { Vorticity, or curl(v) }

```

ポテンシャル流れを規定するラプラス方程式を記述します。

```

EQUATIONS
  dxx(phi) + dyy(phi) = 0                    { Or div(grad(phi)) = 0 }

```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。チャンネル左端部では流速規定型のため、自然境界条件 $\text{Natural}(\phi) = -vx_0$ という指定になります。ドメインから外に向かう方向が + である点に注意してください。一方、チャンネル右端部では Value 文による Dirichlet 型の境界条件設定となっています。その他の境界では $\text{Natural}(\phi) = 0$ という指定を行っていますが、これらの境界上では法線方向の流れの成分が 0 であることが約束されます。

```

BOUNDARIES
  Region 1
    Start 'outer' (0, Ly)
      Natural(phi) = -vx0 Line to (0, -Ly)      { In }
      Natural(phi) = 0   Line to (Lx, -Ly)
                          to (2*Lx, -Ly*coef) to (3*Lx, -Ly*coef)
      Value(phi) = 0     Line to (3*Lx, Ly*coef) { Out }
      Natural(phi) = 0   Line to (2*Lx, Ly*coef) to (Lx, Ly)
                          to Close

```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Contour(phi)
Vector(v) norm
Contour(vn) painted
Contour(p) painted
Contour(p) zoom(1.5*Lx, 0, Lx, Ly)
Surface(p) zoom(1.5*Lx, 0, Lx, Ly)
Elevation(vn) on 'outer'      { Verify boundary conditions }
Contour(div_v)
Contour(curl_z)

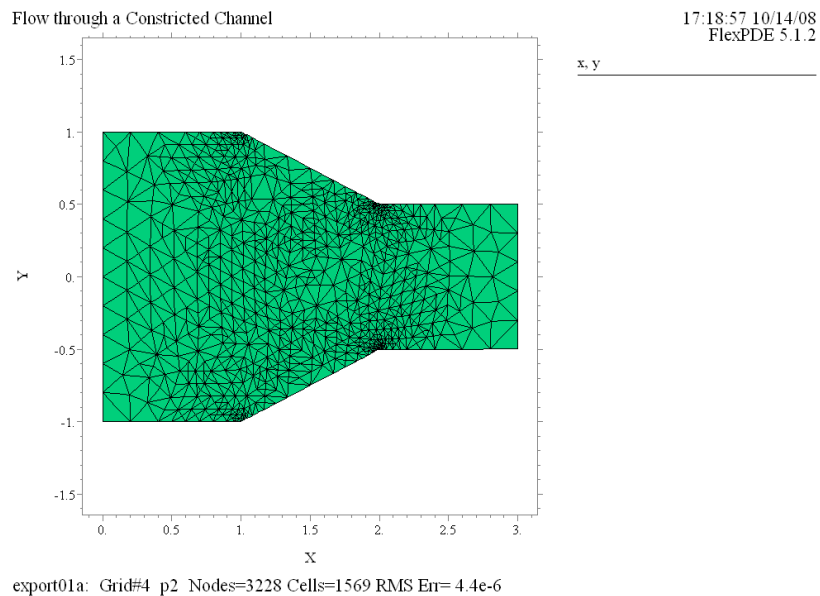
```

END

1.2 実行結果

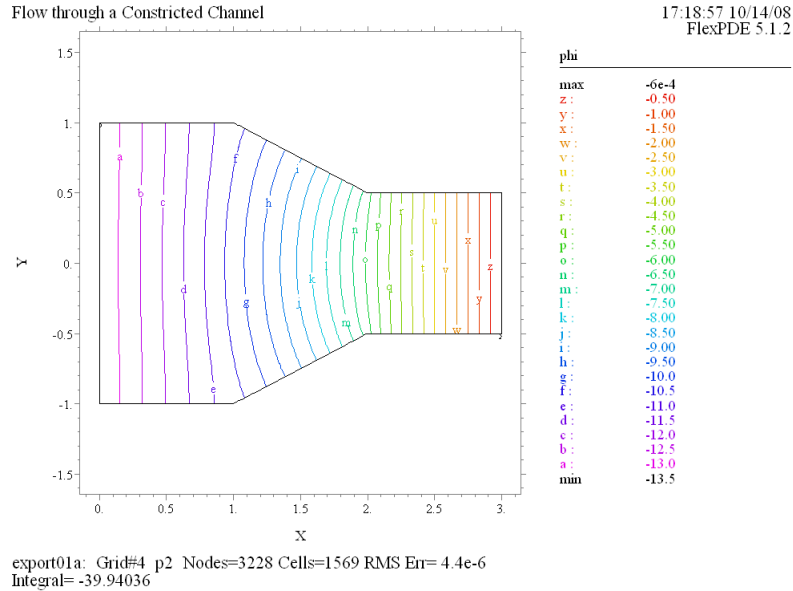
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュ再構成は 3 回行われ、角の部分におけるメッシュ密度が高くなっています。



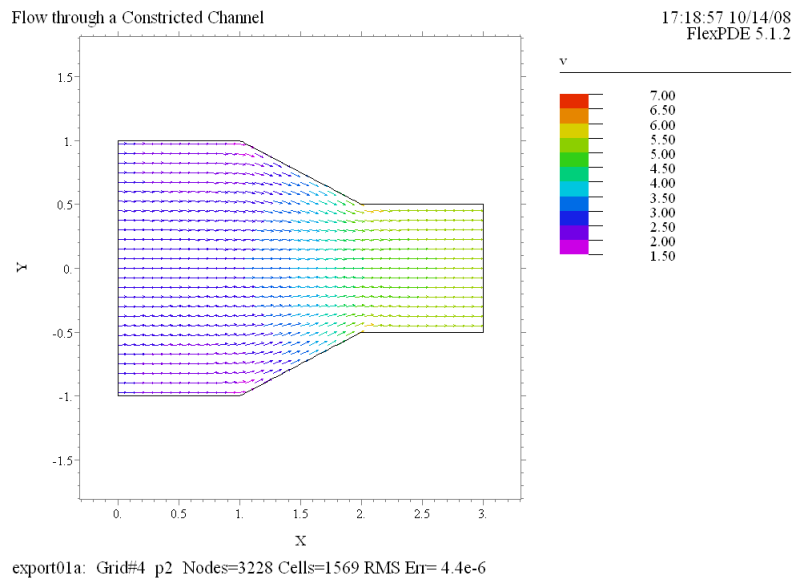
(2) Contour(phi)

速度ポテンシャル ϕ に関する等高線図を示したものです。チャンネルの側壁に対しては直交するパターンとなっており、また右端における ϕ の値は指定値通り 0 となっています。



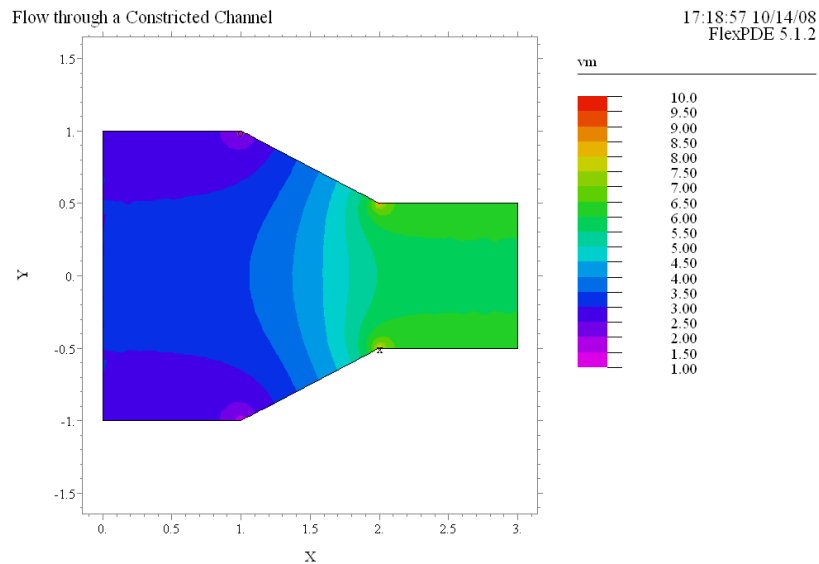
(3) Vector(v) norm

流体の速度場 v を表すベクトルプロットです。norm を指定しているため速度の大きさはカラーによって表現されています。プロット (2) の曲線群とは直交する形の流線が描かれています。チャンネル出口における流速は入口におけるその概ね倍となっていることがカラーコードから読み取れます。



(4) Contour(vm) painted

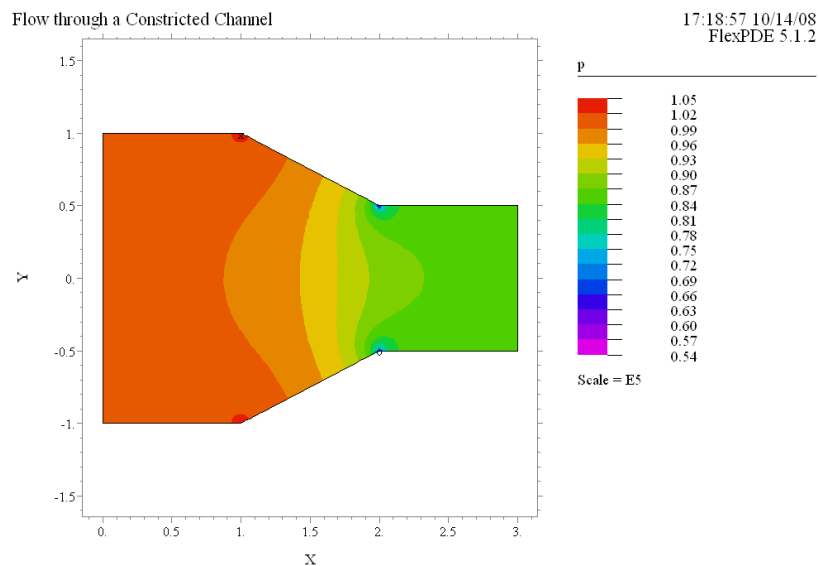
速度ベクトル v の絶対値についての色塗り等高線図です。完全流体ゆえ側壁の近傍であっても速度が落ちることはありません。 $|v|$ の最大、最小値が境界上のどこで起きているかについてはプロット (8) を参照ください。



export01a: Grid#4 p2 Nodes=3228 Cells=1569 RMS Err= 4.4e-6
Integral= 18.17938

(5) Contour(p) painted

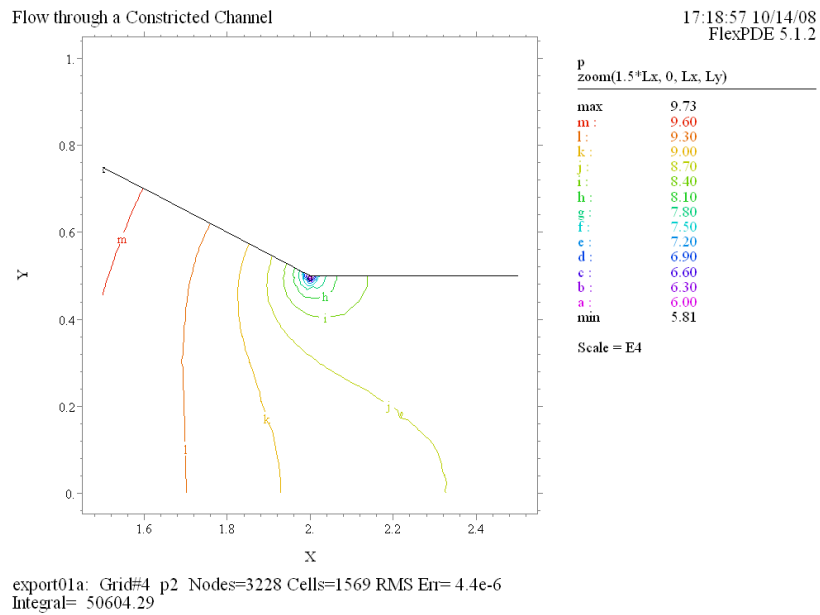
圧力 p に関する色塗り等高線図です。入口部と出口部での圧力の違いはそれほど大きくはありません。



export01a: Grid#4 p2 Nodes=3228 Cells=1569 RMS Err= 4.4e-6
Integral= 429943.4

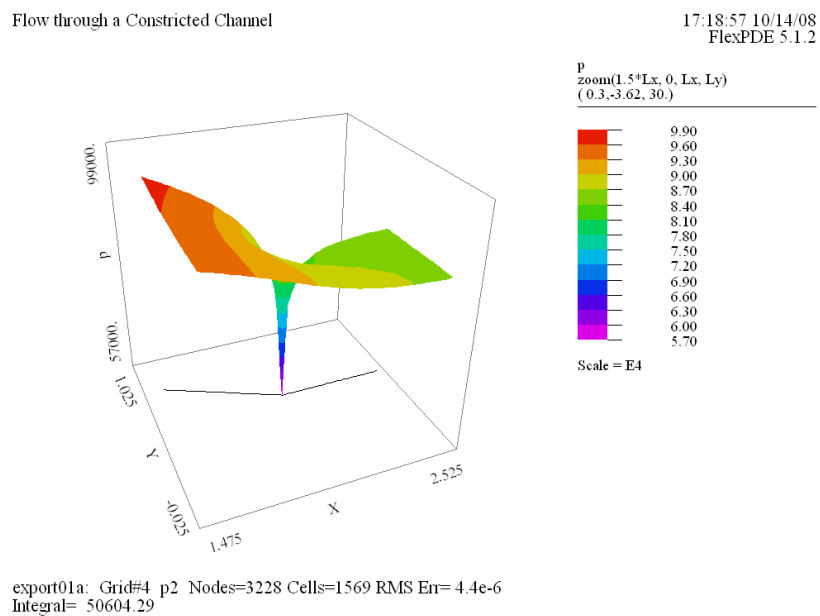
(6) Contour(p) zoom(1.5*Lx, 0, Lx, Ly)

圧力 p に関する等高線図を $(x, y) = (2, 0.5)$ の近辺で拡大したものです。流速 $|v|$ が最大となる点において圧力は最小となります。



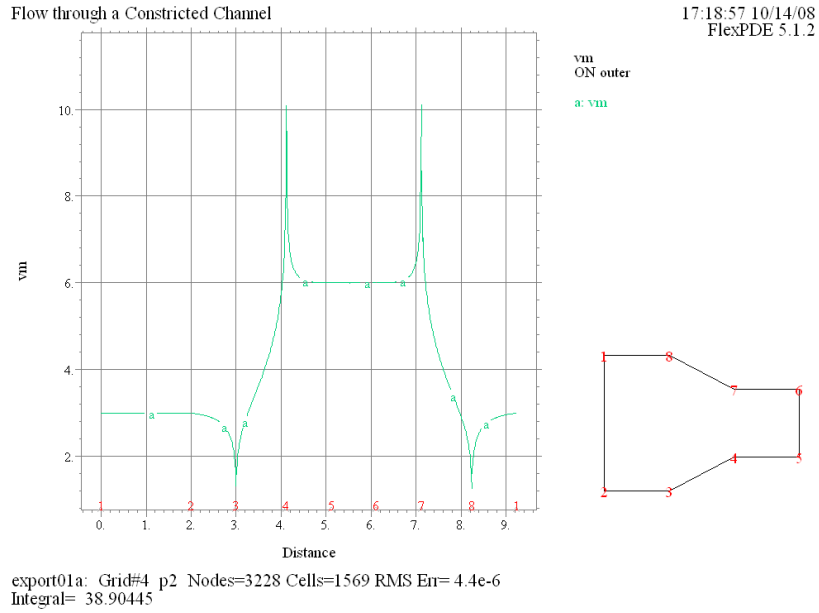
(7) Surface(p) zoom(1.5*Lx, 0, Lx, Ly)

プロット (6) と同じ内容を 3 次元曲面の形で表示したものです。



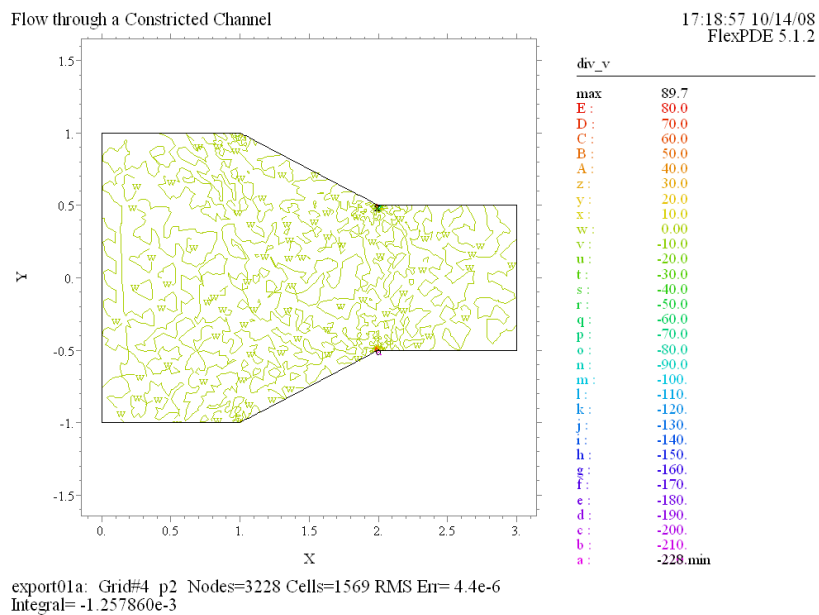
(8) Elevation(v_m) on 'outer'

速度ベクトルの大きさ $|v|$ が外周上でどう変化しているかをプロットしたものです。最大値、最小値がどの箇所であるかが明確に示されています。また入口部、出口部における流速がそれぞれ 3.0, 6.0 であることがプロットから読み取れます。



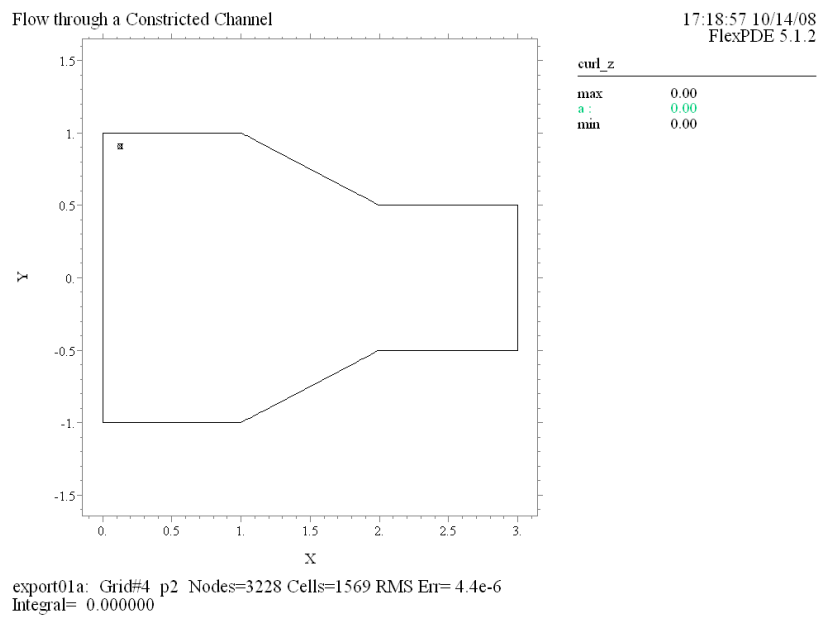
(9) Contour(div_v)

ドメイン全域にわたり $\text{div}(v)$ の値を計算したものです。ほぼ全域で 0 となっており、連続の式 (3) を満足していることがわかります。



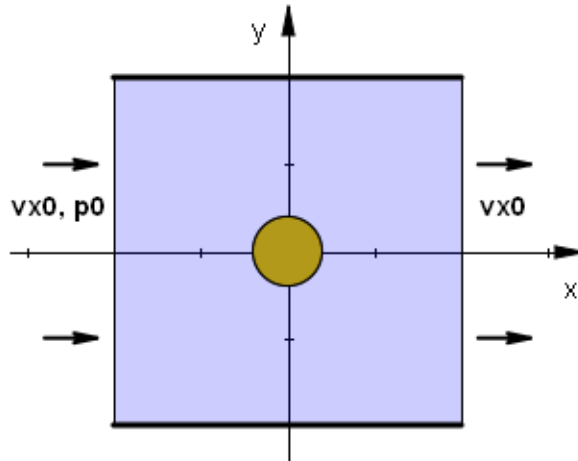
(10) Contour(curl_z)

ドメイン全域にわたり $\text{curl}(v)$ ($\text{rot}(v)$) の値を計算したものです。全域で 0 となっており、渦のない流れであることが確認できます。



2 Case2 - 円柱のまわりの流れ (対称配置)

今度は側壁が平行なチャンネル内に断面が円形の障害物を置いたときの流れの様子を分析します。ただし障害物の中心の位置は側壁から等距離にあるものとします。なお重力場の方向は z 軸方向である点に注意してください。境界条件としては入口側で流速 v_{x0} 、圧力 p_0 を、出口側で流速 v_{x0} を指定します。



2.1 Problem descriptor [pfluid01b.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
  'Obstacle across a Straight Channel'    { pfluid01b.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
  Errlim = 1e-4
```

従属変数を定義します。ポテンシャル流れの場合には一つのスカラー変数 (速度ポテンシャル) のみによって流れがすべて規定されます。

```
VARIABLES
  phi                                { Velocity potential }
```

関連するパラメータや数式を定義します。正方形ドメインの各辺は $2m$ 、円の半径は $0.2m$ です。

```

DEFINITIONS                                { SI units }
  Lx = 1.0  Ly = 1.0  a = 0.2
  vx0 = 5.0                                { x-component of velocity at left end }
  p0 = 1e5                                  { Atmospheric pressure at left end }
  dens = 1e3                                { Mass density }
  vx = dx(phi)  vy = dy(phi)               { Velocity components }
  v = vector(vx, vy)  vm = sqrt(vx^2 + vy^2)
  p = p0 + 0.5*dens*(vx0^2 - vm^2)         { Pressure }
  p1 = p0 + 0.5*dens*vx0^2                 { Pressure at stagnation point }

```

ポテンシャル流れを規定するラプラス方程式を記述します。

```

EQUATIONS
  div(grad(phi)) = 0

```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。外部境界上での境界条件がすべて微係数指定の Natural 型であるため、これでは解が一意に決まらないため、Point value 文によって値を固定している点に注意してください。障害物との境界上では $\text{Natural}(\phi) = 0$ という指定になります。

```

BOUNDARIES
  Region 1
    Start 'outer' (-Lx, Ly) Point value(phi) = 0
    Natural(phi) = -vx0 Line to (-Lx, -Ly) { In }
    Natural(phi) = 0 Line to (Lx, -Ly) { Wall }
    Natural(phi) = vx0 Line to (Lx, Ly) { Out }
    Natural(phi) = 0 Line to Close { Wall }

    Start 'obstacle' (a, 0) { Cut-out }
    Natural(phi) = 0 Arc(Center = 0,0) Angle = 360

```

最後に出力すべき情報を規定します。

```

PLOTS
  Grid(x, y)
  Contour(vm) painted
  Contour(p) painted
  Elevation(p) on 'obstacle' Report(p1)
  Vector(v) norm
  Vector(v) norm zoom(-3*a/2, -3*a/2, 3*a, 3*a)

```

```

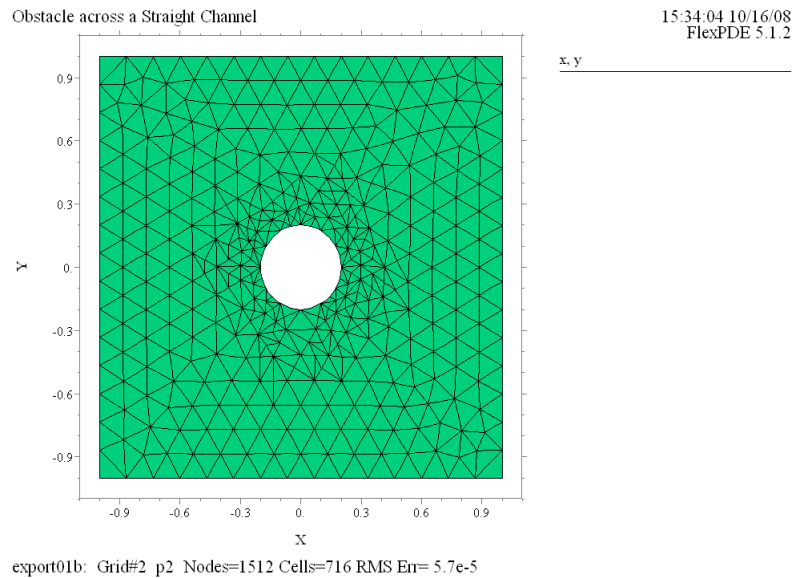
END

```

2.2 実行結果

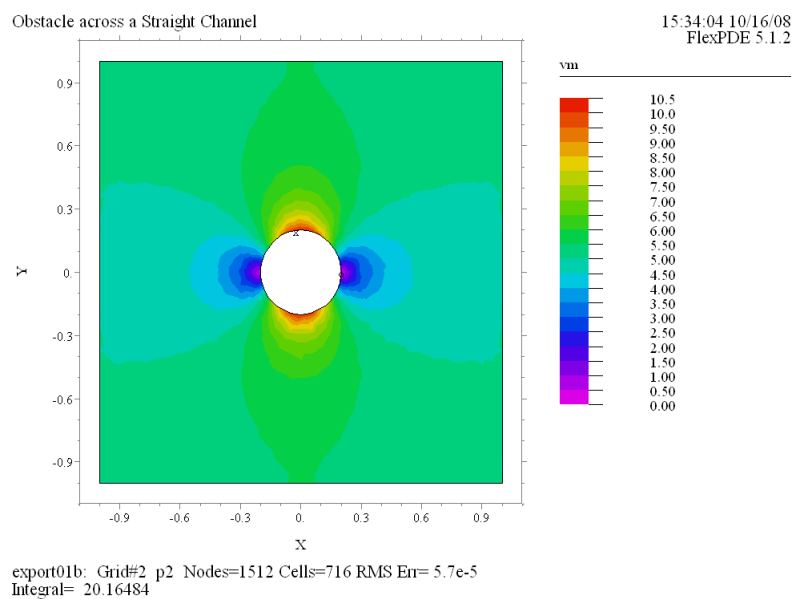
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって自動生成されたメッシュ構造を示しています。円柱周囲でメッシュの細分化が行われています。



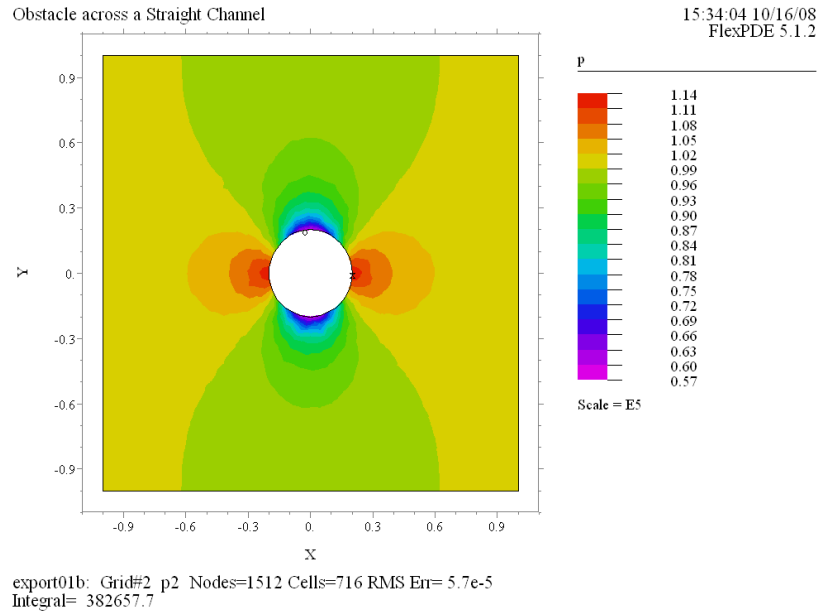
(2) Contour(v_m) painted

速度ベクトルの絶対値 $|v|$ に関する等高線プロットです。円周の上端、下端部で流速が最大に、一方、円周の左端、右端では流速が 0 になっていることがわかります (淀み点)。



(3) Contour(p) painted

圧力 p に関する等高線図です。左右上下共に対称である点に注意してください。円柱に対しては上流側から働く力と下流側から働く力が釣り合った状態となっているため、流れの方向に押す効果は存在しないことになります。

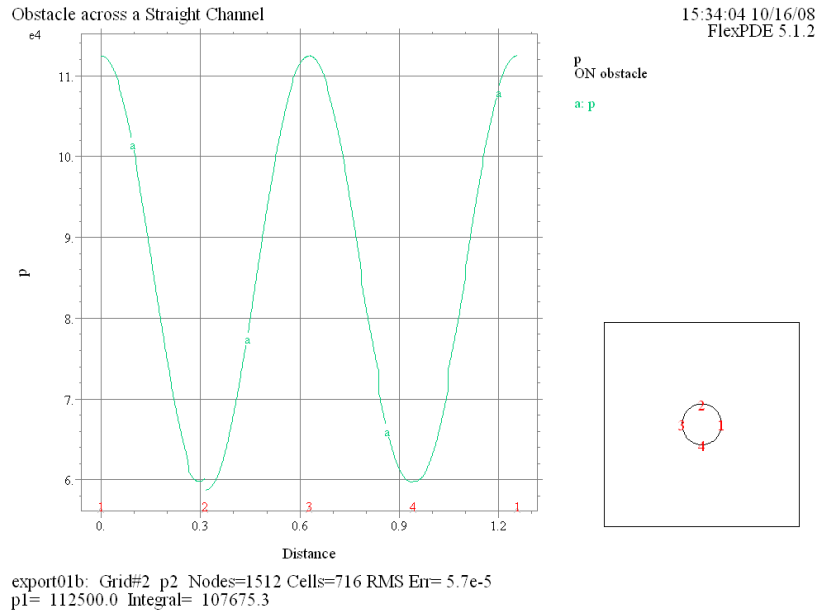


(4) Elevation(p) on 'obstacle' Report(p1)

障害物の境界上での圧力の値をプロットしたもので、上下左右の対称性が明解に示されています。左右端において p の値は $p_0(1e5)$ よりも大きな $1.25e5$ という値を示しています。これはベルヌーイの定理から導かれる

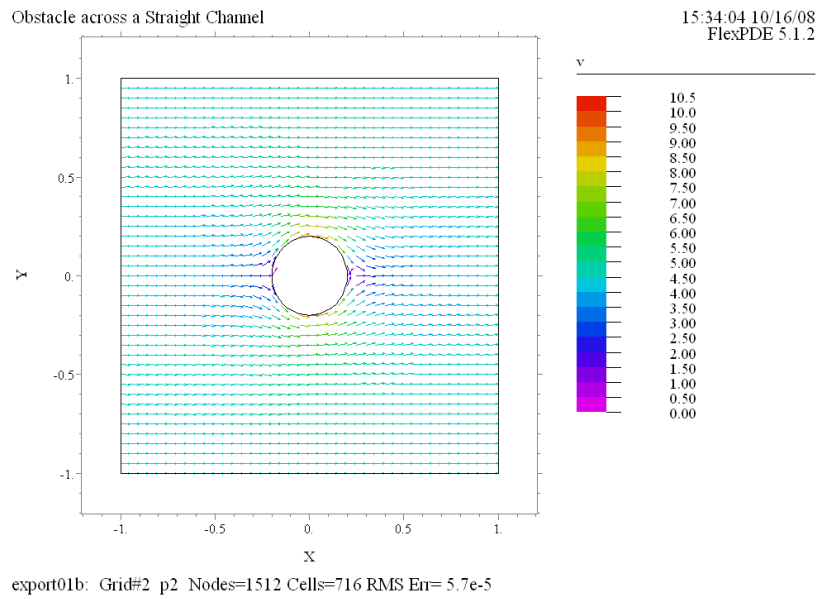
$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2)$$

という式において $v = 0$ (淀み点) を代入したときの値 (Report 文出力参照) に等しいことが確認できます。逆に上端、下端部においては流速が大きいため、圧力は p_0 よりはるかに小さな値となっています。



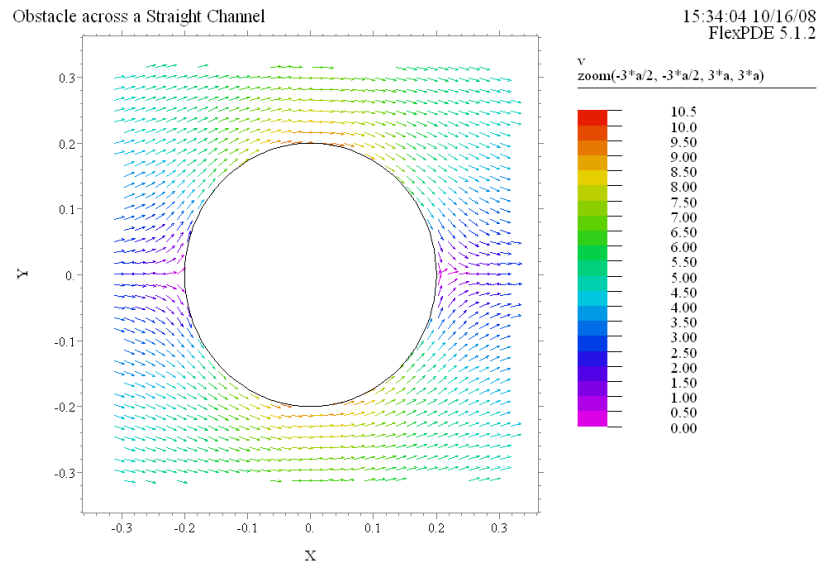
(5) Vector(v) norm

ドメイン全域での流線の様子を示すベクトルプロットです。速度の大きさは色で表現されています。



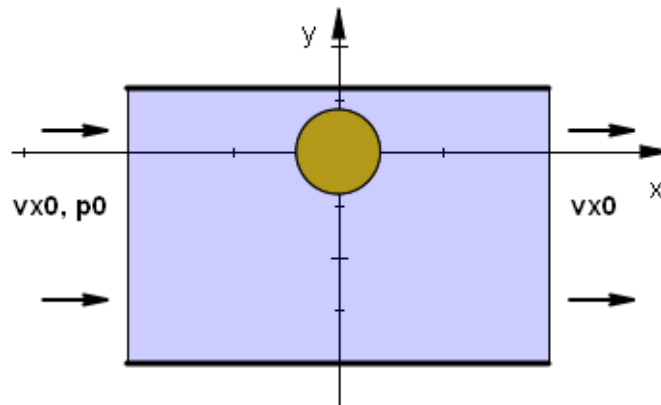
(6) Vector(v) norm zoom(-3*a/2, -3*a/2, 3*a, 3*a)

障害物の近傍部分における流線の様子を拡大表示したものです。



3 Case3 - 円柱のまわりの流れ (非対称配置)

今度は障害物の円柱が一方の壁の近くにあるケースについて考察します。Case2 のスクリプトをベースに、チャンネル左岸のドメイン境界の位置を変更するアプローチで対応します。入口での流速 v_{x0} 、圧力 p_0 、出口での流速 v_{x0} という境界条件は変わりません。



3.1 Problem descriptor [pfluid01c.pde]

Case2 のスクリプト pfluid01b.pde に対する変分のみを記すことにします。

```
TITLE
  'Obstacle across a Channel, Close to Wall'    { pfluid01c.pde }
```

BOUNDARIES セクションにおける指定を次のように変更します。'obstacle' についての記述に変更はありません。

```
BOUNDARIES
  Region 1
    Start 'outer' (-Lx, 0.3*Ly) Point value(phi) = 0
    Natural(phi) = -vx0 Line to (-Lx, -Ly)    { In }
    Natural(phi) = 0   Line to (Lx, -Ly)      { Wall }
    Natural(phi) = vx0 Line to (Lx, 0.3*Ly)   { Out }
    Natural(phi) = 0   Line to Close          { Wall }

    Start 'obstacle' (a, 0)                   { Cut-out }
    Natural(phi) = 0 Arc(Center = 0,0) Angle = 360
```


PLOTS セクションの末尾に 2 つの elevation プロットを追加します。

```
PLOTS
```

```
...
```

```
Elevation(p) from (-Lx, -Ly) to (Lx, -Ly)
```

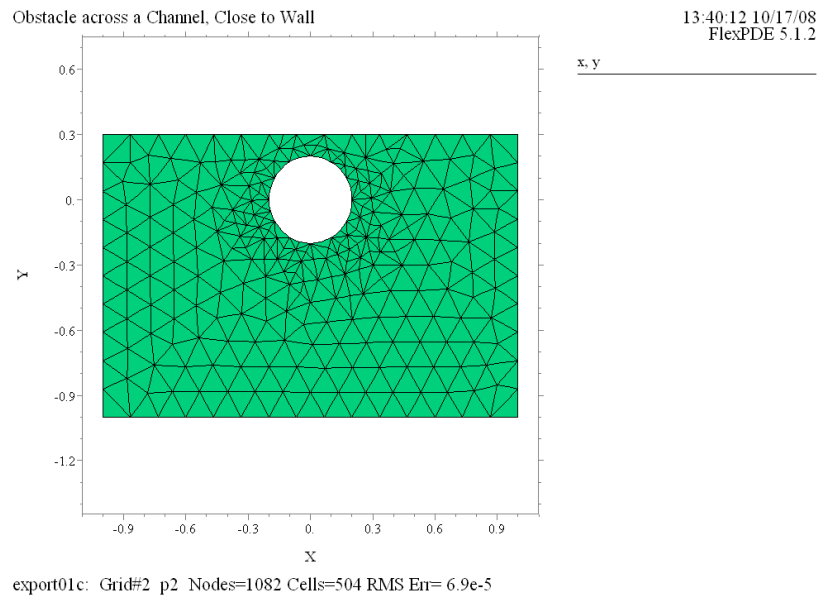
```
Elevation(p) from (-Lx, 0.3*Ly) to (Lx, 0.3*Ly)
```

```
END
```

3.2 実行結果

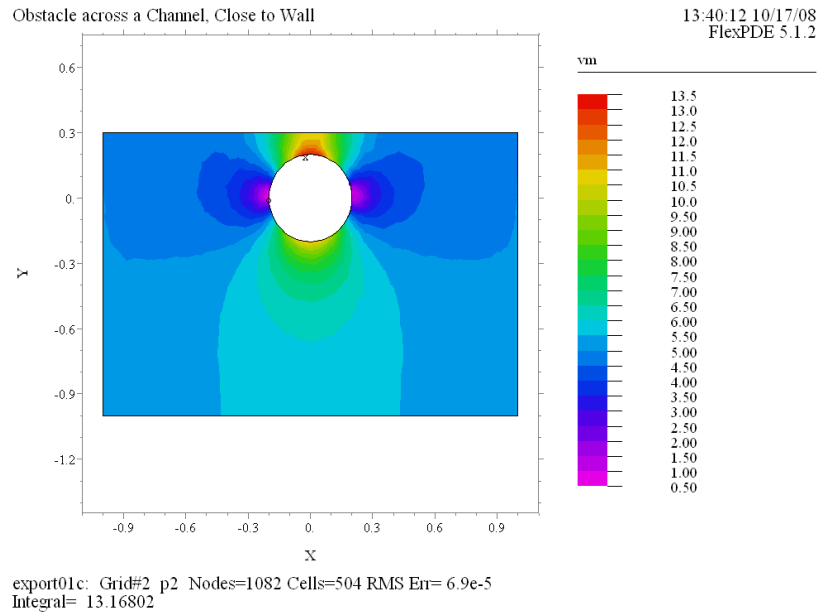
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって自動生成されたメッシュ構造を示しています。



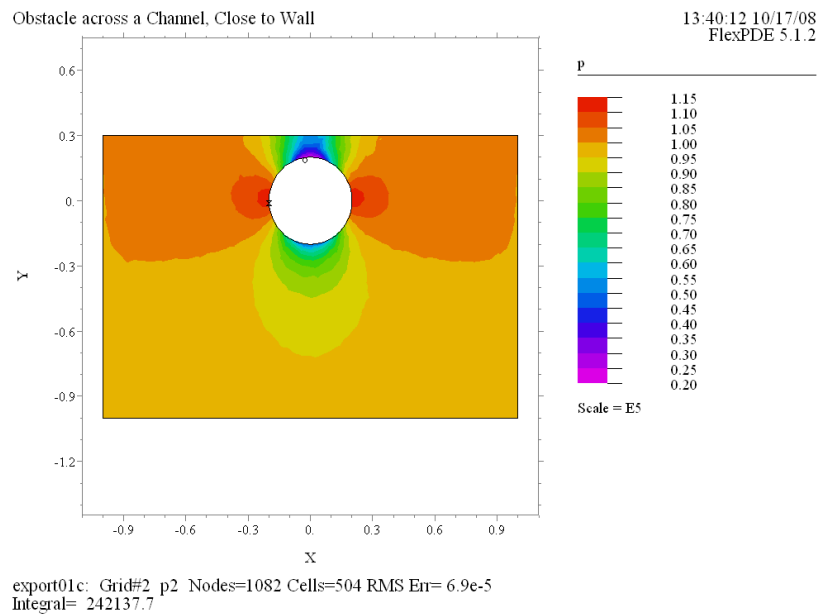
(2) Contour(v_m) painted

速度ベクトルの絶対値 $|v|$ に関する等高線プロットです。流速は障害物の上端部で最大になっています。



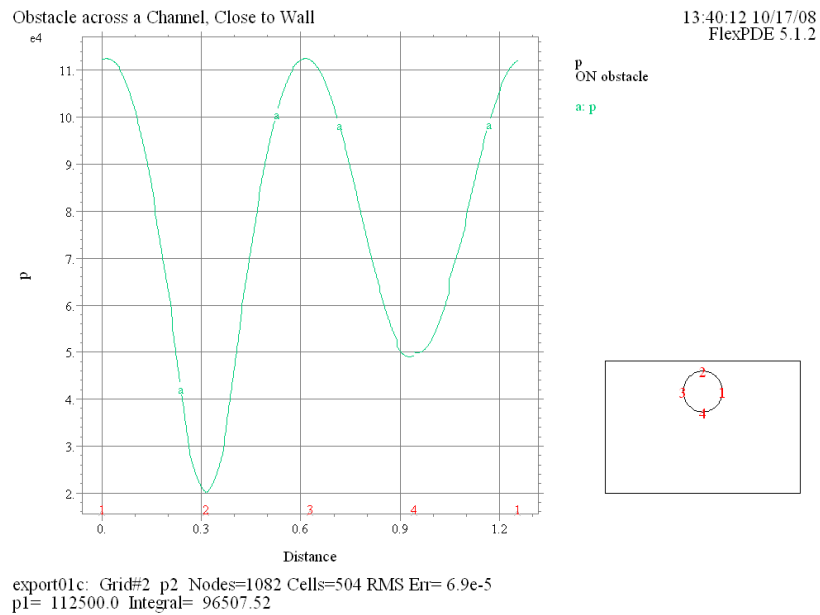
(3) Contour(p) painted

圧力 p に関する等高線図です。左右の対称性は維持されていますが上下は非対称です。障害物上端の方が圧力は低いため、円柱にはチャンネル左岸側への力が働くことになります。



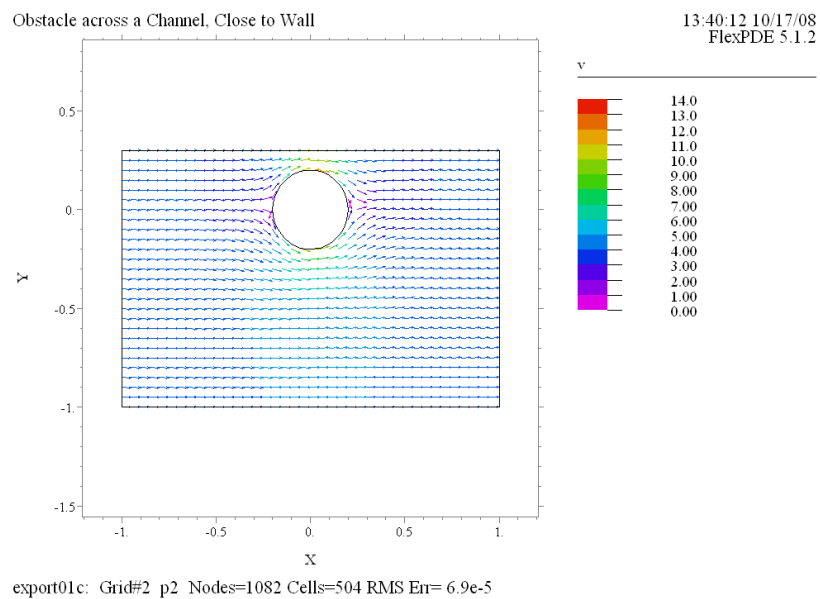
(4) Elevation(p) on 'obstacle' Report(p1)

障害物の境界上での圧力の値をプロットしたものです。障害物の上端と下端における圧力の違いが明確に示されています。



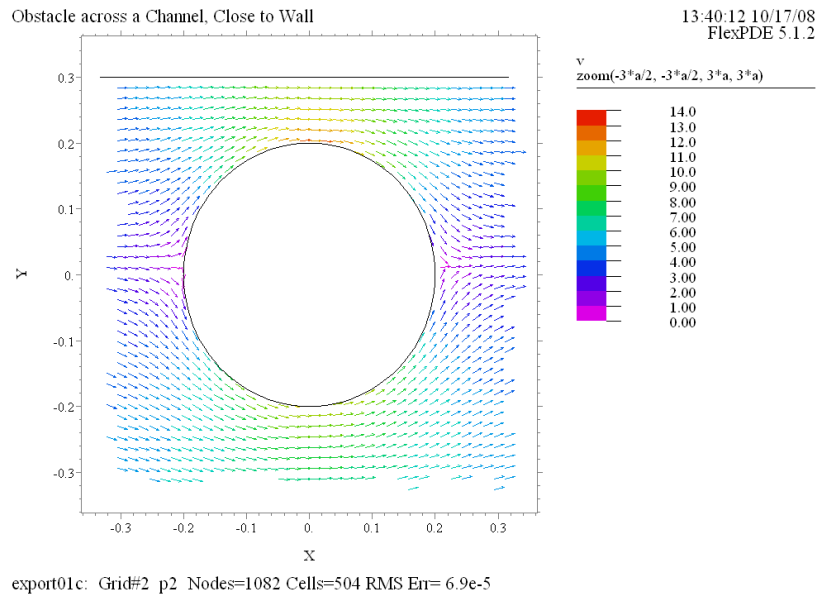
(5) Vector(v) norm

ドメイン全域での流線の様子を示すベクトルプロットです。速度の大きさは色で表現されています。



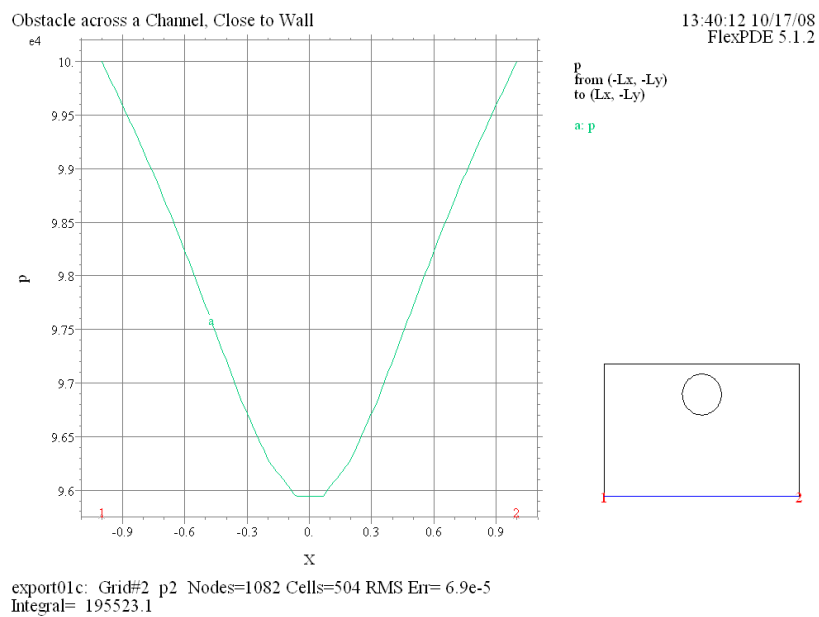
(6) Vector(v) norm zoom(-3*a/2, -3*a/2, 3*a, 3*a)

障害物の近傍部分における流線の様子を拡大表示したものです。



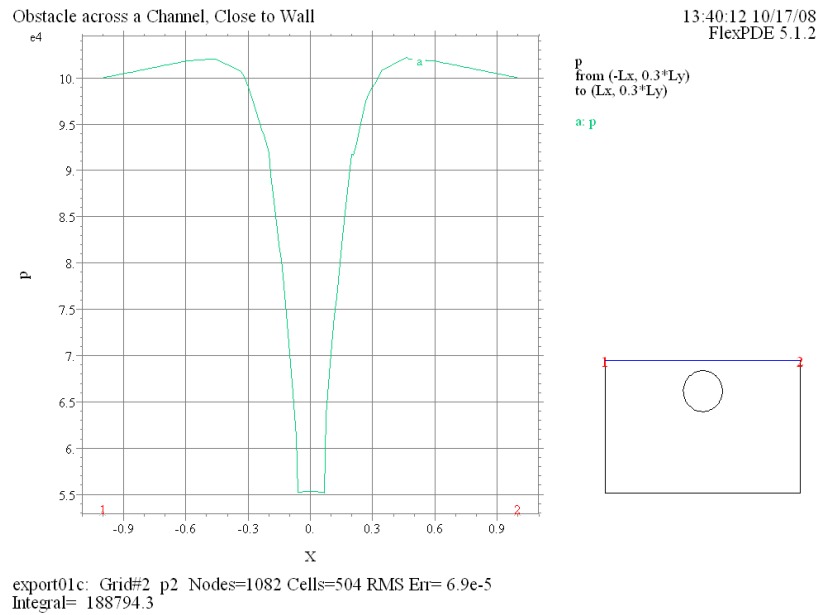
(7) Elevation(p) from (-Lx, -Ly) to (Lx, -Ly)

チャンネルの右岸壁上で圧力がどう変化しているかを示すプロットです。積分値 195523 は右岸壁にかかる力の大きさを示しています。



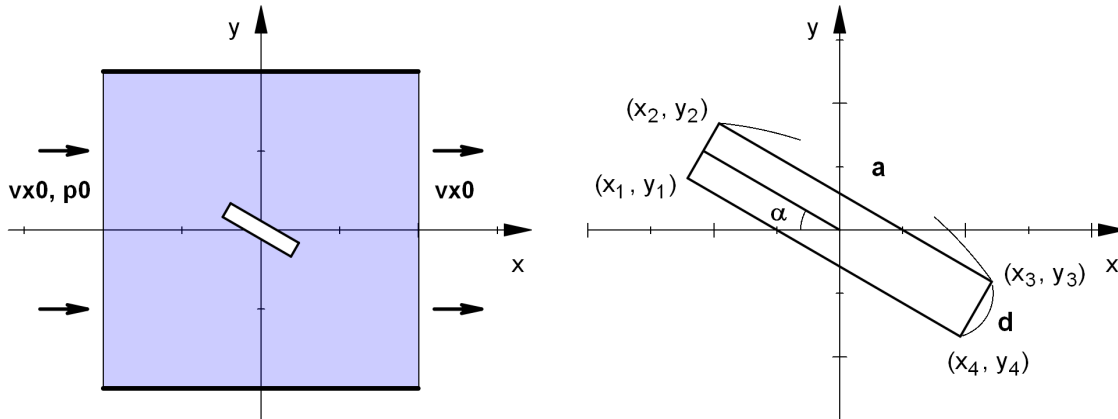
(8) Elevation(p) from $(-L_x, 0.3*L_y)$ to $(L_x, 0.3*L_y)$

チャンネルの左岸壁上で圧力がどう変化しているかを示すプロットです。積分値 188794 は左岸壁にかかる力の大きさを示しています。プロット (7) の積分値との差 6729 が障害物によって引起される流体への力と言えます。



4 Case4 - 傾斜した平板のまわりの流れ

今度は流れの中に平板を斜めに配置したときに、平板にかかる力について分析してみます。流れについてはこれまでと同一の条件、すなわち入口での流速 v_{x0} 、圧力 p_0 、出口での流速 v_{x0} を仮定します。



板の流れに対する角度を α 、板の幅と厚みをそれぞれ $a = 0.5$ 、 $d = 0.1$ としたとき、板の4隅の座標値は次のように与えられる点に注意してください。なお、ここでは $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のケースについて計算を行います。

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{2} \cos \alpha - \frac{d}{2} \sin \alpha & y_1 &= \frac{a}{2} \sin \alpha - \frac{d}{2} \cos \alpha \\ x_2 &= -\frac{a}{2} \cos \alpha + \frac{d}{2} \sin \alpha & y_2 &= \frac{a}{2} \sin \alpha + \frac{d}{2} \cos \alpha \\ x_3 &= -x_1 & y_3 &= -y_1 \\ x_4 &= -x_2 & y_4 &= -y_2 \end{aligned}$$

4.1 Problem descriptor [pfluid01d.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Drag and Lift on a Plate' { pfluid01d.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトタをセットします。

```
SELECT
Errlim = 1e-4
```

従属変数を定義します。ポテンシャル流れの場合には一つのスカラー変数（速度ポテンシャル）のみによって流れがすべて規定されます。

VARIABLES

```
phi { Velocity potential }
```

関連するパラメータや数式を定義します。最後の `brute_force` という式にかかっている $2 \cdot y_2$ という式は $y_2 - y_4$ を意味し、板の流れの方向 (x 方向) への射影面積 (z 方向には 1 を取る) に対応します。

DEFINITIONS

```
{ SI units }
Lx = 1.0 Ly = 1.0 a = 0.5*Ly d = 0.2*a
vx0 = 5.0 { x-component of velocity at left end }
alpha = PI/6 { Angle of attack, radians }
si = sin(alpha) co = cos(alpha)
x1 = -d/2*si - a/2*co { Corner coordinates }
y1 = -d/2*co + a/2*si
x2 = d/2*si - a/2*co
y2 = d/2*co + a/2*si
x3 = -x1 y3 = -y1 x4 = -x2 y4 = -y2
p0 = 1e5 { Atmospheric pressure at left end }
dens = 1e3 { Mass density }
vx = dx(phi) vy = dy(phi) { Velocity components }
v = vector(vx, vy) vm = magnitude(v)
p = p0 + 0.5*dens*(vx0^2 - vm^2) { Pressure }
brute_force = p0*2*y2
```

ポテンシャル流れを規定するラプラス方程式を記述します。

EQUATIONS

```
dxx(phi) + dyy(phi) = 0 { Or div(grad(phi)) = 0 }
```

BOUNDARIES セクションにおける設定のしかたは Case1-3 の場合と同様です。

BOUNDARIES

```
Region 1
```

```
Start 'outer' (-Lx, Ly) Point value(phi) = 0
```

```
Natural(phi) = -vx0 Line to (-Lx, -Ly)
```

```
Natural(phi) = 0 Line to (Lx, -Ly)
```

```
Natural(phi) = vx0 Line to (Lx, Ly)
```

```
Natural(phi) = 0 Line to Close
```

```
Start 'obstacle' (x1, y1) { Cut-out }
```

```
Natural(phi) = 0 Line to (x2, y2) to (x3, y3) to (x4, y4) to Close
```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Contour(vm) painted
Vector(v) norm
Contour(p) painted
Elevation(p) from (-Lx, -Ly) to (-Lx, Ly) { Left }
  Report(brute_force)
Elevation(p) from (Lx, -Ly) to (Lx, Ly) { Right }
Elevation(p) from (-Lx, -Ly) to (Lx, -Ly) { Bottom }
Elevation(p) from (-Lx, Ly) to (Lx, Ly) { Top }

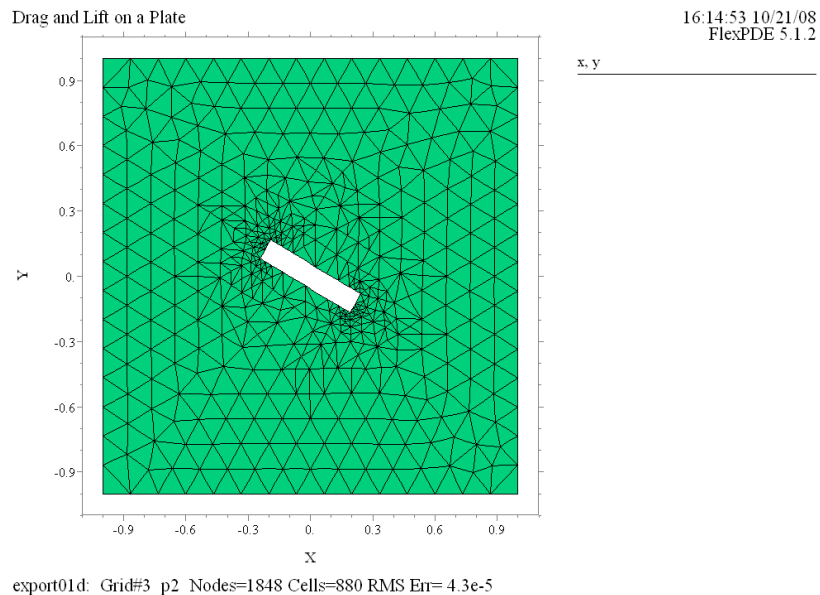
```

END

4.2 実行結果

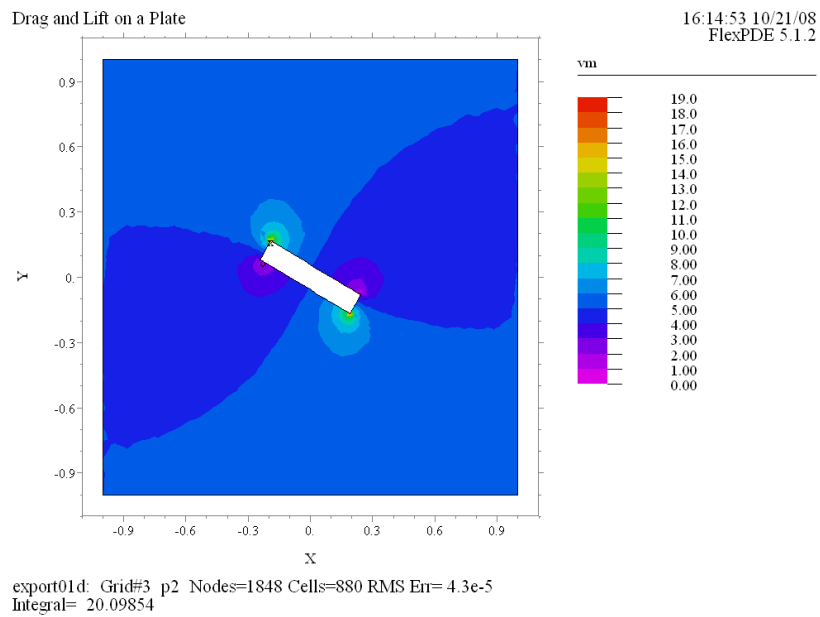
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって自動生成されたメッシュ構造を示しています。メッシュ再構成が 2 回行われ、板の両端部でメッシュ密度が高くなっています。



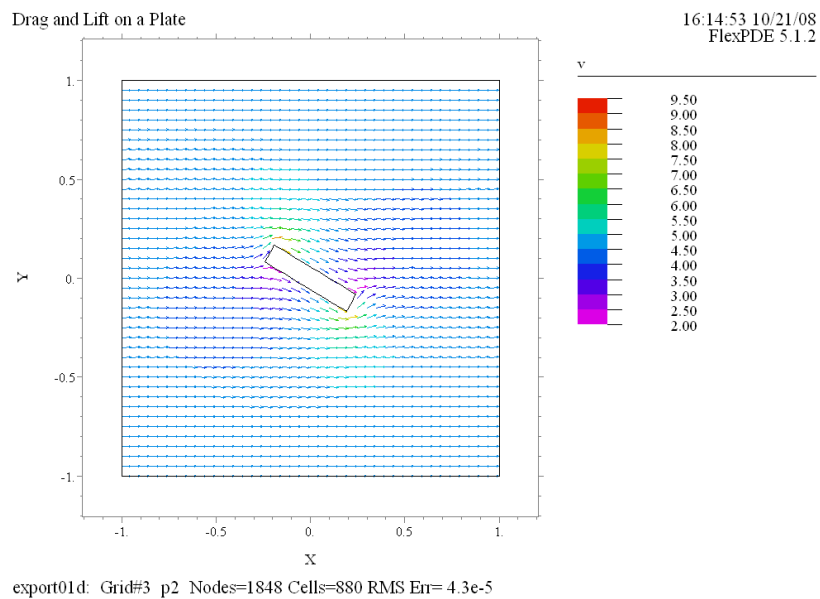
(2) Contour(v_m) painted

速度ベクトルの絶対値 $|v|$ に関する等高線プロットです。流速は (x_2, y_2) , (x_4, y_4) の部分で最大に、 (x_1, y_1) , (x_3, y_3) の部分で最小になっていることがわかります。



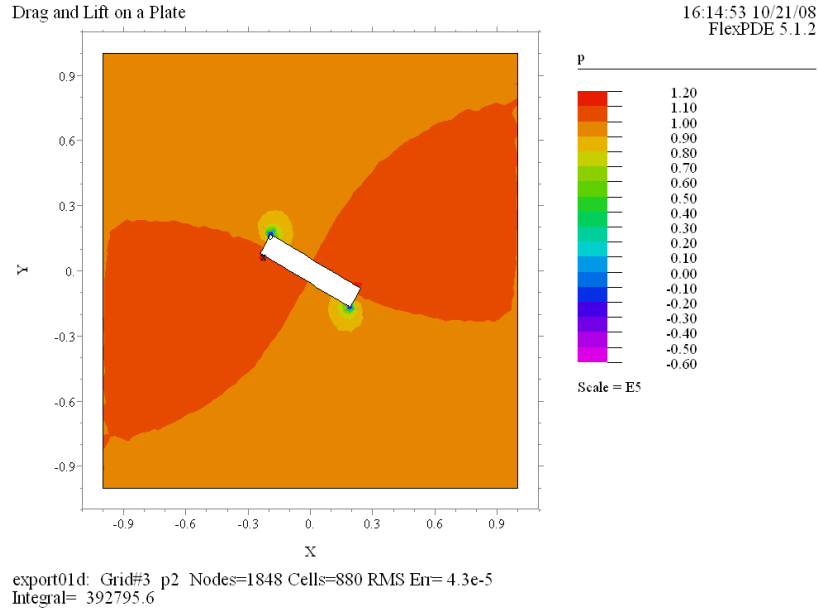
(3) Vector(v) norm

流体の速度場 v を表すベクトルプロットです。norm を指定しているため速度の大きさはカラーによって表現されています。



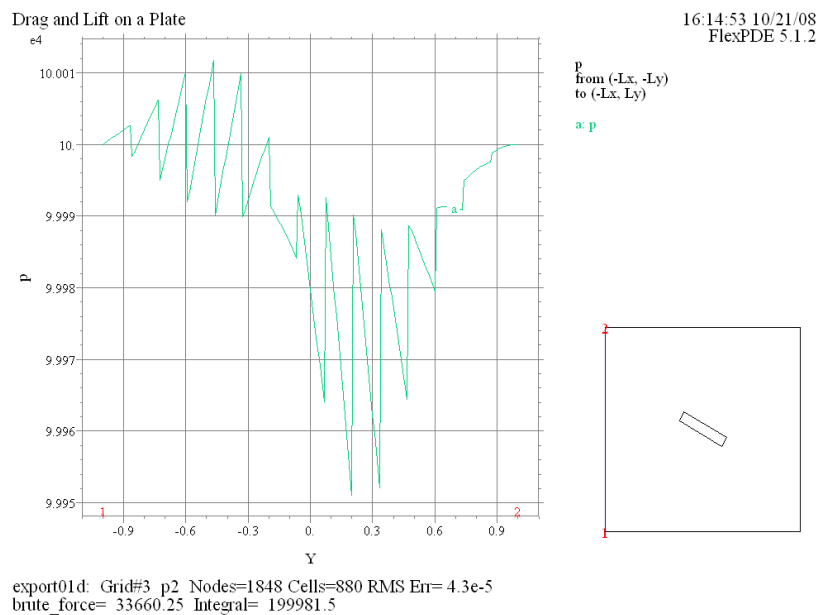
(4) Contour(p) painted

圧力 p に関する等高線図です。流速が早い部分で圧力が低くなっています。平板に対しては時計方向の回転モーメントがかかっていることがわかります。



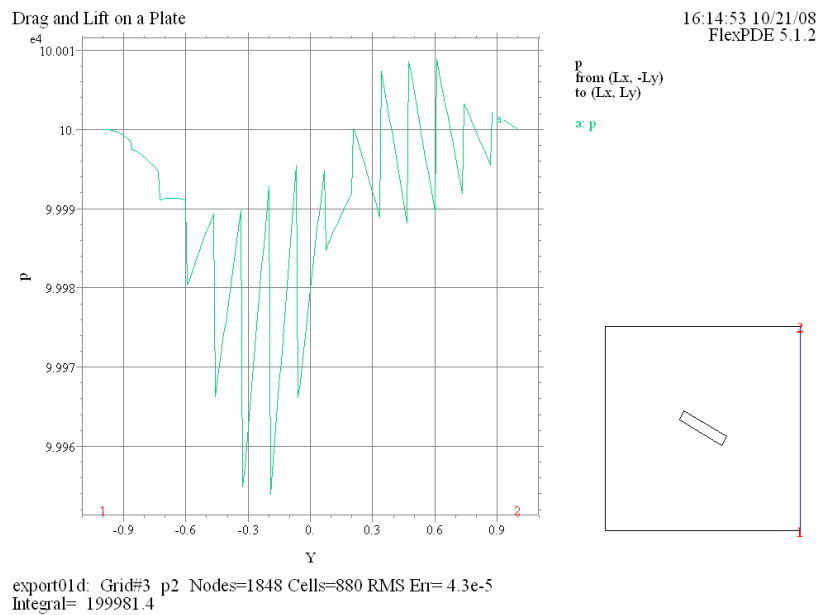
(5) Elevation(p) from (-Lx, -Ly) to (-Lx, Ly) Report(brute_force)

ドメイン左端における p の値をプロットしたもので、概ね $1e5$ という値を示しています。出力されている `brute_force` という値は計算式からわかるように、流れが平板に及ぼす力の概数を示しています。 p の線積分値 199982 という値は次のプロットで参照します。

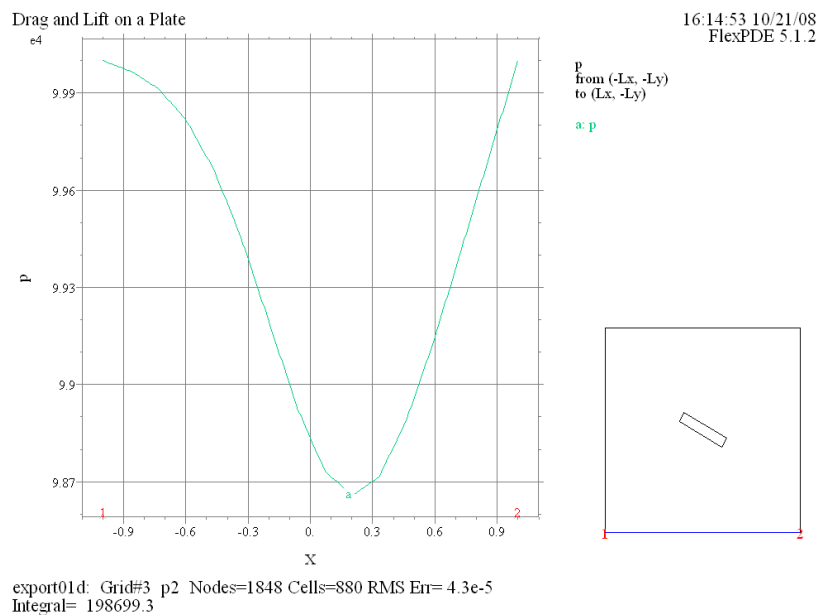


(6) Elevation(p) from $(Lx, -Ly)$ to (Lx, Ly)

ドメイン右端における p の値をプロットしたもので、概ね $1e5$ という値を示しています。 p の線積分値を左端と右端とで比較した場合、その差は `brute_force` のオーダーに比べて negligible small と言えます。

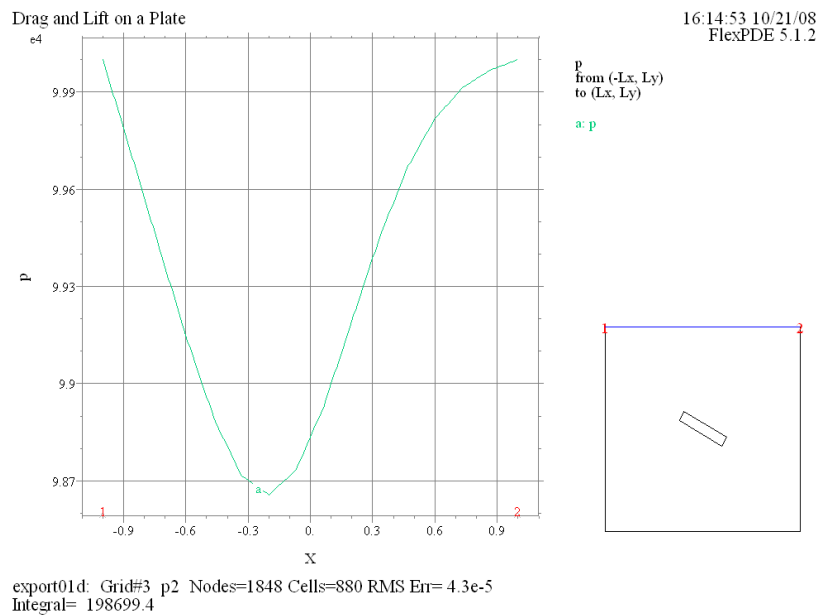
(7) Elevation(p) from $(-Lx, -Ly)$ to $(Lx, -Ly)$

ドメイン下端 (チャンネル右岸) における p の値をプロットしたものです。 p の線積分値 198699 という値に注意してください。



(8) Elevation(p) from $(-L_x, L_y)$ to (L_x, L_y)

ドメイン上端（チャンネル左岸）における p の値をプロットしたものです。 p の線積分値を下端と上端とで比較した場合、その差は brute_force のオーダーに比べて negligible small と言えます。



プロット (5)-(8) の線積分値の結果が示唆するところは、平板に対して drag や lift という net force が全く働いていないということです。実際ポテンシャルフローの場合にはこのような結果になることが解析的に示されています。これは常識と矛盾する結果であるわけですが、その原因は粘性を全く持たない完全流体を仮定したことに起因しています。より現実に即した結果を導くためには粘性に配慮したモデルを考える必要があります。

■