gb012a

GB012a: 粘性流体の扱いについて

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

1 連立偏微分方程式

粘性流体の運動は次の **Navier-Stokes 方程式**によって記述されます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\left[\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\right] + \boldsymbol{f} \tag{1}$$

ここに

- $\boldsymbol{u}$ - 速度ベクトル
- $\boldsymbol{f}$ - 単位体積当りの流体に加わる外力ベクトル
- ρ - 密度
- p - 圧力
- ν - 動粘性係数

を意味します。今、非圧縮性流体について考えることにすると、連続の式（GB011 参照）より $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$ が言えるため方程式は次のようになります。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{2}$$

ここで Backstrom 氏の記法に合せるべく

$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{v}$

$\rho \to \rho_0$

$\rho_0 \boldsymbol{f} \to \boldsymbol{F}$

$\rho_0 \nu \to \eta$

という書換えを行うと方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_0\,(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F} + \nabla p - \eta\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

となります。

今、2 次元の流れに話を限ることにし、ベクトル表記を成分表記に改めて書くと方程式 (3) は次のような連立偏微分方程式となります。

$$\rho_0 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} \end{Bmatrix} + \rho_0 \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v} - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} - \eta \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = 0 \tag{4}$$

ここで非線形項である第 2 項はベクトル形式のままに残してありますが、これは **Reynolds 数**

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 v_0 L_0}{\eta} \tag{5}$$

が十分小さい値のときには粘性項（第 5 項）に比べ第 2 項が無視できることを企図してのことです（v_0, L_0 はそれぞれ解ドメイン中における典型的な速度、典型的な長さを意味します)。この場合、方程式は線形となり層流に対応した解が導かれることになります。

ところで従属変数は v_x, v_y, p の 3 つであるため、Navier-Stokes の方程式 (4) だけでは不十分です。これを補うものが質量保存則から導かれる連続の式（GB011 参照）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} = 0$$

です。特に非圧縮定常流の場合には

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

となります。ただし 1 階の偏微分方程式を方程式 (4) と組み合わせるのは何か問題があるためか、Backstrom 氏は Navier-Stokes 方程式 (3) に発散演算子 ∇· を適用、それと (6) を組み合わせることによって第 3 の方程式を誘導しています。すなわち ∇· を適用することによって

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho_0 \nabla \cdot \left[\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v}\right] - \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla^2 p - \eta \nabla \cdot \left(\nabla^2 \boldsymbol{v}\right) = 0$$

ここで $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ より第 1 項は消えます。さらに最終項も

$$\nabla \cdot \left(\nabla^2 \boldsymbol{v}\right) = \nabla^2 \left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) = \nabla^2 (0) = 0$$

と変形することによって消せるため、修正型の N-S 方程式

$$\nabla^2 p + \rho_0 \nabla \cdot \left[\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v}\right] - \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0 \tag{7}$$

が誘導されます。直交座標系での成分表示に改めると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \rho_0 \nabla \cdot \left[\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v}\right] - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{8}$$

のようになります（ここでも $\rho_0 \nabla \cdot \left[\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v}\right]$ という項は無視するためベクトル表記のままに留めてあります)。

ただし方程式 (8) を (4) と組み合わせた場合、その解が $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ を満たすという保証がありません。そこで問題によっては (8) に $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ の項を意図的に追加した

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\rho_0\nabla\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right]-\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)-f_\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{9}$$

を使用することもあります。ただし $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ を満たす解が誘導されるように、f_∇ の値は問題に応じて調節する必要があります（試行錯誤を伴います）。なお、f_∇ の次元を考慮し以降では

$$f_\nabla=C\frac{\eta}{{L_0}^2} \tag{10}$$

という表現を用いることにし、C の値を適宜調整することにします。

2 境界条件

圧力に関する境界条件を指定する場合、その値を設定する Dirichlet 型境界条件（`VALUE` 文）については何も迷うことはありません。しかし自然境界条件（`NATURAL` 文）の場合には少々考慮が必要です。自然境界条件の場合、境界上での外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla p$$

と記述できます。一方、N-S 方程式より

$$\nabla p=\boldsymbol{F}+\eta\nabla^2\boldsymbol{v}-\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\rho_0\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial n}&=\boldsymbol{n}\cdot\nabla p\\&=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}+\eta\boldsymbol{n}\cdot\nabla^2\boldsymbol{v}-\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right]\\&=n_xF_x+n_yF_y+\eta\left[n_x\nabla^2v_x+n_y\nabla^2v_y\right]-\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right]\end{aligned} \tag{11}$$

ここで数式 (11) において、定常流の場合には $\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ の項が消え、また Re の値が十分小さい場合には $\rho_0\boldsymbol{n}\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right]$ の項が無視できる形となります。

3 Re$\ll 1$ の場合の定常流

本章では定常流についてのみ考えることにします。このため時間微分の項は省略できます。また Reynolds 数 Re が十分小さいケースに話を限定すれば $\rho_0\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}$ という非線形項も無視することができます。また 2 次元の流れということで外力の項も無視できる環境では、数式 (4), (9) は次のように簡単な式となります。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} - \eta \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - C\frac{\eta}{{L_0}^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{13}$$

特に簡単な流れの場合には $C = 0$ という形で発散項 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を含めなくても解を求めることができます。一方、自然境界条件に関する式 (11) は次のようになります。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \eta\left[n_x\nabla^2 v_x + n_y\nabla^2 v_y\right] \tag{14}$$

■