# 常微分方程式の解法事例 - ラプラス変換

SWP/SNB には解析的手法で常微分方程式を解く機能が備わっていますが、ここでは**ラプラス変換**による解法について、その実力を検証してみます。

【 参考文献 】　小寺平治著： なっとくする微分方程式（講談社）

| | |
|---|---|
| Example1 | 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3t}$ を $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ のもとで解け。 |

## 1. **教科書的解法**

$L[y(t)] = Y(s)$ とすると

$$\begin{aligned} L[y] &= Y \\ L[y'] &= sY(s) - y(0) = sY \\ L[y''] &= s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) = s^2Y - 1 \\ L[e^{3t}] &= \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

よって与えられた微分方程式はラプラス変換後の世界では

$$(s^2Y - 1) - 3sY + 2Y = \frac{4}{s-3}$$

と表現される。これを $Y$ について解くと

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s-2)} + \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

ラプラス逆変換のために部分分数に分解すると

$$Y = \frac{1}{s-1} - \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

従ってラプラス逆変換を行うと

$$y = e^t - 3e^{2t} + 2e^{3t} \tag{1}$$

## 2. SWP/SNB-MuPAD

与えられた微分方程式と初期条件を次のように 3 行 1 列のマトリックス内に配置、

| $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3t}$ |
|---|
| $y(0) = 0$ |
| $y'(0) = 1$ |

これに対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用することにより次のような解が得られます。

$$\{e^t - 3e^{2t} + 2e^{3t}\} \tag{2}$$

| Example2　　微分方程式 $y'' - 7y' + 12y = 11\cos t + 7\sin t$ を $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ のもとで解け。 |
|---|

1. **教科書的解法**

$L[y(t)] = Y(s)$ とすると

$$\begin{aligned} L[y] &= Y \\ L[y'] &= sY(s) - y(0) = sY - 1 \\ L[y''] &= s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) = s^2Y - s - 1 \\ L[\cos t] &= \frac{s}{s^2+1} \\ L[\sin t] &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

よって与えられた微分方程式はラプラス変換後の世界では

$$(s^2Y - s - 1) - 7(sY - 1) + 12Y = \frac{11s}{s^2+1} + \frac{7}{s^2+1}$$

と表現される。これを $Y$ について解くと

$$Y = \frac{s^3 - 6s^2 + 12s + 1}{(s-4)(s-3)(s^2+1)} = \frac{1}{s-4} - \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2+1}$$

ラプラス逆変換により

$$y = e^{4t} - e^{3t} + \cos t \tag{3}$$

2. SWP/SNB-MuPAD

与えられた微分方程式と初期条件を次のように 3 行 1 列のマトリックス内に配置、

$$\begin{matrix} y'' - 7y' + 12y = 11\cos t + 7\sin t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{matrix}$$

これに対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用することにより次のような解が得られます。

$$\{\cos t - e^{3t} + e^{4t}\} \tag{4}$$

Example3　微分方程式 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 3te^{2t}$ の一般解を求めよ。

1. **教科書的解法**

今、$y(0) = a,\ y'(0) = b,\ y''(0) = c$ とおけば、

$$\begin{aligned} L[y] &= Y \\ L[y'] &= sY - a \\ L[y''] &= s^2Y - as - b \\ L[y'''] &= s^3Y - as^2 - bs - c \\ L[te^{2t}] &= \frac{1}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

よって与えられた微分方程式はラプラス変換後の世界では

$$(s^3Y - as^2 - bs - c) - 6(s^2Y - as - b) + 12(sY - a) - 8Y = \frac{3}{(s-2)^2}$$

$$(s-2)^3Y = as^2 - (6a - b)s + (12a - 6b + c) + \frac{3}{(s-2)^2}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s\ \text{の 2 次式}}{(s-2)^3} + \frac{3}{(s-2)^5} \\ &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3} + \frac{3}{(s-2)^5} \end{aligned}$$

従ってラプラス逆変換を行うと、

$$y = Ae^{2t} + Bte^{2t} + \frac{C}{2}t^2e^{2t} + \frac{3}{4!}t^4e^{2t}$$

$\frac{C}{2}$ を改めて $C$ とおくと、求める微分方程式の一般解は、

$$y = (A + Bt + Ct^2)e^{2t} + \frac{1}{8}t^4e^{2t} \qquad (\ A, B, C\text{：任意定数}) \tag{5}$$

2. SWP/SNB-MuPAD

微分方程式 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 3te^{2t}$ に対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用すると次のような解が得られます。

$$\left\{ y(0)\,e^{2t} + \frac{1}{8}t^4e^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t}\,(4y(0) - 4y'(0) + y''(0)) + te^{2t}\,(y'(0) - 2y(0)) \right\} \tag{6}$$

$y(0) = A,\ y'(0) - 2y(0) = B,\ \frac{1}{2}(4y(0) - 4y'(0) + y''(0)) = C$ と置換すると数式 5 が導けます。ただし初期条件との対応を図る上では数式 6 の方が便利でしょう。

次の例はラプラス変換後の“ウラ”の世界で、通常の**代数方程式**ではなく**微分方程式**に導くテクニックを必要とします。SWP/SNB-MuPAD のラプラス変換 ODE solver は残念ながらそこまで対応できていません。

> Example4　$y(0) = 0,\ y''(0) = 2$ のとき、次の微分方程式を解け。
> $$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0$$

1. **教科書的解法**

$L[f(t)] = F(s)$ としたとき、$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$ が成立する。本問ではこの公式を用い、ラプラス変換後の世界で微分方程式に誘導する。

$L[y] = Y(s),\ y'(0) = a$ とおくと、

$$\begin{aligned} L[y] &= Y \\ L[y'] &= sY - y(0) = sY \\ L[y''] &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - a \end{aligned}$$

よって与えられた微分方程式をラプラス変換すると、

$$L[ty''] + 2L[ty'] - L[y'] + L[ty] - L[y] = L[0]$$

$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$ という公式を適用すると、

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y - a) - 2\frac{d}{ds}(sY) - sY - \frac{d}{ds}Y - Y = 0$$

$$2sY + s^2\frac{dY}{ds} + 2\left(Y + s\frac{dY}{ds}\right) + sY + \frac{dY}{ds} + Y = 0$$

$$\therefore\quad (s^2 + 2s + 1)\frac{dY}{ds} + 3(s+1)Y = 0$$

$$\therefore\quad (s+1)\frac{dY}{ds} + 3Y = 0$$

この $Y$ に関する微分方程式を変数分離法で解くと、

$$\int \frac{1}{Y}dY = -3\int \frac{1}{s+1}ds \qquad\qquad \therefore\quad Y = \frac{C}{(s+1)^3}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと、

$$y = \frac{C}{2}t^2e^{-t}$$

このとき、

$$y' = \frac{C}{2}(2te^{-t} - t^2e^{-t}), \qquad y'' = \frac{C}{2}(2e^{-t} - 4te^{-t} + t^2e^{-t})$$

$y''(0) = 2$ という条件より $C = 2$ が決まるので、求める解は

$$y = t^2e^{-t} \tag{7}$$

2. SWP/SNB-MuPAD

与えられた微分方程式と初期条件を次のように 3 行 1 列のマトリックス内に配置、

$$\begin{aligned} ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \end{aligned}$$

これに対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用すると、次のようなレスポンスが返ってきます。

$$\left\{2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s_8+1}\mathcal{L}\left(t\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s_8+1}\mathcal{L}\left(t\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t\partial t}\right)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s_8+1}\mathcal{L}(ty(t))\right)\right\}$$

$\mathcal{L}(ty(t))$, $\mathcal{L}\left(t\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)$, $\mathcal{L}\left(t\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t\partial t}\right)$ の処理で行き詰まっていることがわかります。なおラプラス変換を断念し、**常微分方程式：解**コマンドを適用すると、この場合、

$$\left\{t^2 e^{-t}\right\} \tag{8}$$

という結果が得られます。

Example5　次の連立微分方程式を解け。

$$\begin{cases} x' = 27x - 30y & x(0) = 1 \\ y' = 20x - 22y & y(0) = 1 \end{cases}$$

1. **教科書的解法**

$L[x(t)] = X(s)$, $L[y(t)] = Y(s)$ とおき、各式をラプラス変換する。

$$\begin{cases} L[x'] = 27L[x] - 30L[y] \\ L[y'] = 20L[x] - 22L[y] \end{cases}$$

$L[x'] = sX - x(0) = sX - 1$, $L[y'] = sY - y(0) = sY - 1$ より、

$$\begin{cases} sX - 1 = 27X - 30Y \\ sY - 1 = 20X - 22Y \end{cases}$$

従って、

$$\begin{cases} (s-27)X + 30Y = 1 \\ -20X + (s+22)Y = 1 \end{cases}$$

これを $X, Y$ について解くと、

$$\begin{cases} X = \dfrac{s-8}{s^2-5s+6} = \dfrac{6}{s-2} - \dfrac{5}{s-3} \\ Y = \dfrac{s-7}{s^2-5s+6} = \dfrac{5}{s-2} - \dfrac{4}{s-3} \end{cases}$$

ラプラス逆変換を両辺に施すことにより、求める解は、

$$\begin{cases} x = 6e^{2t} - 5e^{3t} \\ y = 5e^{2t} - 4e^{3t} \end{cases} \tag{9}$$

2. SWP/SNB-MuPAD

与えられた微分方程式と初期条件を次のように 4 行 1 列のマトリックス内に配置、

$$\begin{aligned} x' &= 27x - 30y \\ y' &= 20x - 22y \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

これに対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用することにより次のような解が得られます。

$$\left\{\left[y\left(t\right) = e^{\frac{5}{2}t}\left(\cosh\frac{1}{2}t - 9\sinh\frac{1}{2}t\right), x\left(t\right) = e^{\frac{5}{2}t}\left(\cosh\frac{1}{2}t - 11\sinh\frac{1}{2}t\right)\right]\right\} \tag{10}$$

$\cosh\frac{1}{2}t = (e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t})/2,\ \sinh\frac{1}{2}t = (e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t})/2$ を数式 10 に代入し整理すると、数式 9 が導けます。

Example6　次の連立微分方程式を解け。

$$\begin{cases} x' = \quad y - t & x(0) = 1 \\ y' = -x + 1 & y(0) = 0 \end{cases}$$

1. **教科書的解法**

$L[x(t)] = X(s),\ L[y(t)] = Y(s)$ とおき、各式をラプラス変換する。

$$\begin{cases} L[x'] = L[y] - L[t] \\ L[y'] = -L[x] + L[1] \end{cases}$$

$L[x'] = sX - x(0) = sX - 1,\ L[y'] = sY - y(0) = sY,\ L[t] = \dfrac{1}{s^2},\ L[1] = \dfrac{1}{s}$ より、

$$\begin{cases} sX - 1 = Y - \dfrac{1}{s^2} \\ sY = -X + \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} s^3X - s^2Y = s^2 - 1 \\ sX + s^2Y = 1 \end{cases}$$

これを $X, Y$ について解くと、

$$\begin{cases} X = \dfrac{s}{s^2+1} \\ Y = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

ラプラス逆変換を両辺に施すことにより、求める解は、

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} \tag{11}$$

2. SWP/SNB-MuPAD

与えられた微分方程式と初期条件を次のように 4 行 1 列のマトリックス内に配置、

$$\begin{aligned} x' &= y - t \\ y' &= -x + 1 \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

これに対して**常微分方程式：ラプラス**コマンドを適用することにより次のような解が得られます。

$$\{[y\,(t) = t - \sin t, x\,(t) = \cos t]\} \tag{12}$$

■