

常微分方程式の解法事例 - 1 階線形微分方程式

SWP/SNB には解析的手法で常微分方程式を解く機能が備わっていますが、ここでは 1 階線形微分方程式に帰着できるケースを中心に、その実力を検証してみます。

【参考文献】 小寺平治著：なっとくする微分方程式（講談社）

Example1 微分方程式 $y' + 2xy = x$ を解け。

1. 教科書の解法

1 階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \quad (1)$$

で与えられる。今の場合、 $P(x) = 2x$, $Q(x) = x$ なのだから

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2x dx} \left(\int x e^{\int 2x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-x^2} \left(\int x e^{x^2} dx + C \right) \\ &= e^{-x^2} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right) \\ &= C e^{-x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

2. SWP/SNB-MuPAD

数式 $y' + 2xy = x$ に対して常微分方程式：解コマンドを適用、結果は次の通り。

$$\left\{ C_{35} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \right\} \quad (3)$$