LightStone

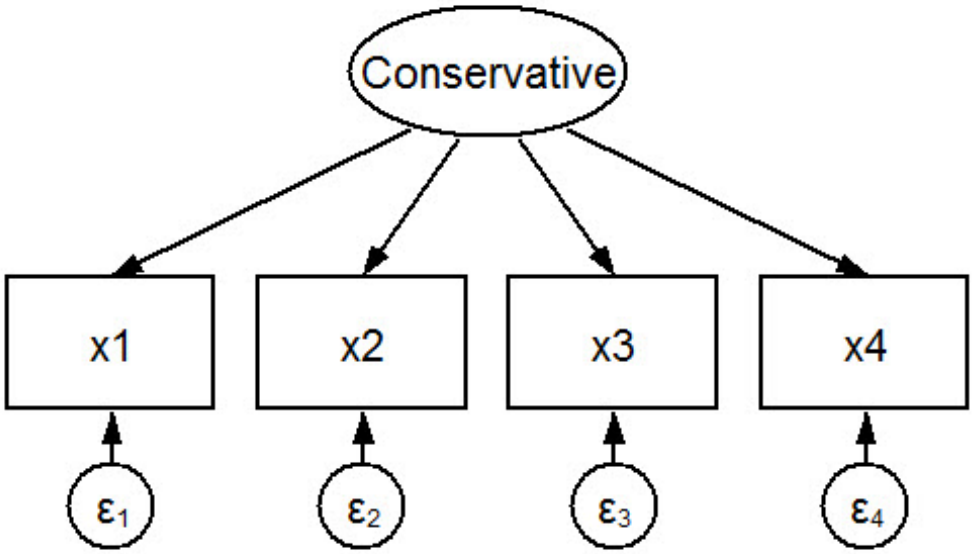
第 2 回　モデル推定の詳細

SEM の第二回目です．今回は初回の内容の細部を少し詳しく考察することにします．解説には主に Stata のマニュアル [SEM] STATA STRUCTURALEQUATION MODELING REFERENCE MANUAL を用います．

第2章　モデル推定の実際

2.1　簡単なモデル

- ここでは実際のモデル推定の内容を学ぶ
- 第一章と同じく nlsy97cfa.dta を用いて極めてシンプルなモデルを推定する
- 例として次に示す 4 つの因子からなる簡単なパス図を作成する



この状態を式で示すと次のようになる．潜在変数 Conservative は X で示す．

$$x_1 = \alpha_1 + X\beta_1 + e.x_1$$
$$x_2 = \alpha_2 + X\beta_2 + e.x_2$$
$$x_3 = \alpha_3 + X\beta_3 + e.x_3$$
$$x_4 = \alpha_4 + X\beta_4 + e.x_4$$

ここでは次の同時分布を考える．

$$(X, x_1, x_2, x_3, x_4, e.x_1, e.x_2, e.x_3, e.x_4,)$$

この同時分布は i.i.d であり，その平均ベクトルを μ, 共分散行列を $\mathbf{\Sigma}$ と表現する．

ここで次のモデルを推定する.

```
. sem (Conservative->x1-x4)
```

```
(7186 observations with missing values excluded)
Endogenous variables
Measurement:  x1 x2 x3 x4
Exogenous variables
Latent:       Conservative
Fitting target model:
Structural equation model                       Number of obs     =      1,799
Estimation method  = ml
Log likelihood     = -7571.5183
 ( 1)  [x1]Conservative = 1
```

	Coef.	OIM Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
Measurement						
x1 <-						
Conservative	1	(constrained)				
_cons	2.328516	.0241199	96.54	0.000	2.281242	2.37579
x2 <-						
Conservative	.8304375	.0561603	14.79	0.000	.7203653	.9405096
_cons	1.61423	.0188197	85.77	0.000	1.577344	1.651116
x3 <-						
Conservative	1.079912	.0653285	16.53	0.000	.9518709	1.207954
_cons	1.416342	.0157728	89.80	0.000	1.385428	1.447257
x4 <-						
Conservative	.9371644	.0569076	16.47	0.000	.8256274	1.048701
_cons	1.3602	.014713	92.45	0.000	1.331363	1.389037
var(e.x1)	.8117739	.0299674			.7551133	.872686
var(e.x2)	.4752263	.0179306			.441351	.5117016
var(e.x3)	.1736938	.0119274			.1518213	.1987173
var(e.x4)	.1831841	.009878			.1648115	.2036047
var(Conservative)	.2348338	.0255071			.1898038	.2905469

```
LR test of model vs. saturated: chi2(2)   =     55.29, Prob > chi2 = 0.0000
```

- 推定結果の各ブロックは先に示した回帰モデルの係数 α と β, そして誤差分散
- var(Conservative) は潜在変数の分散
- 推定結果の一番下にある尤度比検定はモデルの当てはまりの良さに関する仮説検定.
- 推定したモデルの共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ について考えると, 共分散の存在は仮定していない.
- つまり, 作成したモデルで次のような制約条件が設定されている状態である.

- 誤差項の共分散

$$
\begin{aligned}
\sigma_{e.x_1,e.x_2} &= \sigma_{e.x_2,e.x_1} = 0 \\
\sigma_{e.x_1,e.x_3} &= \sigma_{e.x_3,e.x_1} = 0 \\
\sigma_{e.x_1,e.x_4} &= \sigma_{e.x_4,e.x_1} = 0 \\
\sigma_{e.x_2,e.x_3} &= \sigma_{e.x_3,e.x_2} = 0 \\
\sigma_{e.x_2,e.x_4} &= \sigma_{e.x_4,e.x_2} = 0 \\
\sigma_{e.x_3,e.x_4} &= \sigma_{e.x_4,e.x_3} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

- 潜在変数 X と誤差項の共分散

$$
\begin{aligned}
\sigma_{X,e.x_1} &= \sigma_{e.x_1,X} = 0 \\
\sigma_{X,e.x_2} &= \sigma_{e.x_2,X} = 0 \\
\sigma_{X,e.x_3} &= \sigma_{e.x_3,X} = 0 \\
\sigma_{X,e.x_4} &= \sigma_{e.x_4,X} = 0
\end{aligned}
$$

- 平均ベクトル μ

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= 0 \\
\mu_{e.x_1} &= 0 \\
\mu_{e.x_2} &= 0 \\
\mu_{e.x_3} &= 0 \\
\mu_{e.x_4} &= 0
\end{aligned}
$$

相関の設定

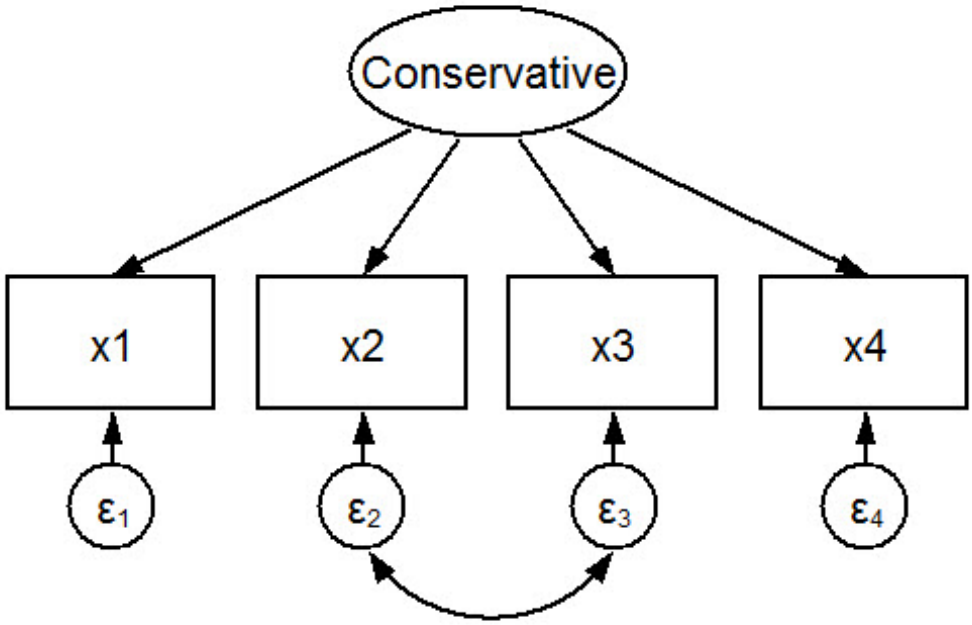
例えば, ここで変数 x_1 と x_2 の間に相関を考えてパス図を次のように更新する.
この時, 先の誤差項における制約の内,

$$\sigma_{e.x_2,e.x_3} = \sigma_{e.x_3,e.x_2} = 0$$

を除外することになる.

モデル推定の詳細

- saturated model は上記の共分散の制約を外したもの
- 構築したモデルはゼロ制約がかかっている



潜在変数を X として単純回帰モデルの推定値を考えると,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 X + \hat{e}_1 \\
x_2 &= \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 X + \hat{e}_2 \\
x_3 &= \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 X + \hat{e}_3 \\
x_4 &= \hat{\alpha}_4 + \hat{\beta}_4 X + \hat{e}_4
\end{aligned}
$$

例えば, x_1 と x_2 の共分散について考えると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(x_1, x_2\right) &= \mathrm{Cov}\left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 X + \hat{e}_1, \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 X + \hat{e}_2\right) \\
&= \mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_1 X, \hat{\beta}_2 X\right) \\
&= \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \,\mathrm{V}\left(X\right)
\end{aligned}
$$

となり, 推定したモデルから観測可能な変数間の共分散のフィット値を計算できる.

ポイントの整理

- 調査の結果得られた変数の情報
- 主成分分析や因子分析は計算結果の解釈のみ
- 変数の分散共分散情報をモデルを使って表現する
- その時, モデルの中に分析者の視点を持ち込むことができる

- 分散共分散の情報をある程度再現できなくては意味がない

2.2 コマンド入力と SEM ビルダー

- SEM ビルダーとコマンド入力の特徴

1. SEM ビルダーの場合, 推定結果は係数としてパス図に表示され, 同時に, Stata の Results ウィンドウにも表示される.
2. コマンド入力の場合, 推定結果の表だけを表示する.
3. コマンド入力の方が SEM ビルダーに比べ, モデル推定は素早く行える.
4. コマンド入力の場合, コマンドを do ファイルとして保存できるので, エラーが発生した時の原因の調査が簡単.

コマンド入力の詳細

1. パス図では観測可能な変数は矩形, 潜在変数は円 (楕円) で表現する.

   一般的な Stata のルールとして観測可能な変数は小文字, 潜在変数は先頭または全ての文字を大文字で表記する.

2. コマンドが横に長くなる場合は /// を利用する.

```
. sem (x1<-X) (x2<-X) (x3<-X) (x4<-X)
```

   または

```
 .sem  (x1<-X)  (x2<-X)    ///
       (x3<-X)  (x4<-X)
```

   または,

```
 .sem  (x1<-X)    ///
       (x2<-X)    ///
       (x3<-X)    ///
       (x4<-X)
```

3. 矢印の方向に制限はない.

```
 (x1<-X)
 (X->x1)
```

4. 変数は並列で表記できる.

```
 (X->x1 x2 x3 x4)
```

   次のように記述できる.

```
 (X->x1) (X->x2) (X->x3) (X->x4)
```

   または,

```
(x1<-X) (x2<-X) (x3<-X) (x4<-X)
(x1 x2 x3 x4 <-X)
```

少し複雑なモデルの場合として,

```
(X Y ->x1 x2 x3) (X->x4 x5) (Y->x6 x7)
```

これは次のようにも記述できる.

```
(X->x1 x2 x3 x4 x5)     ///
(Y->x1 x2 x3 x6 x7)
```

同じく,

```
(X->x1) (X->x2) (X->x3) (X->x4) (X->x5)     ///
(Y->x1) (Y->x2) (Y->x3) (Y->x6) (Y->x7)
```

5. パス図では誤差項を配置する必要があるが, コマンド入力では省略できる.

```
(x1<-X) (x2<-X) (x3<-X) (x4<-X)
```

これを敢えて明示的に書けば,

```
(x1<-X e.x1)     ///
(x2<-X e.x2)     ///
(x3<-X e.x3)     ///
(x4<-X e.x4)
```

パス係数に 1 という制約を掛ける場合は,

```
(x1<-X e.x1@1)     ///
(x2<-X e.x2@1)     ///
(x3<-X e.x3@1)     ///
(x4<-X e.x4@1)
```

もちろん, これは次のようにも書ける.

```
(x1<-X@1)     ///
(x2<-X@1)     ///
(x3<-X@1)     ///
(x4<-X@1)
```

6. 制約の無い場合,

```
(x1<-X) (x2<-X) (x3<-X) (x4<-X)
```

ここで x2<-X のパス係数を 2 とする場合は,

```
(x1<-X) (x2<-X@2) (x3<-X) (x4<-X)
```

x2<-X と x3<-X の係数は等しいという制約を掛ける場合は,

```
(x1<-X) (x2<-X@b) (x3<-X@b) (x4<-X)
```

7. 共分散の存在を仮定する場合の曲線矢印を意図する場合は,

```
(x1 x2 x3 x4 <-X), cov(e.x2*e.x3)
```

e.x2*e.x3 と e.x3*e.x4 の 2 つのセットで考える場合は,

```
(x1 x2 x3 x4 <-X), cov(e.x2*e.x3 e.x3*e.x4)
```

または,

```
(x1 x2 x3 x4 <-X), cov(e.x2*e.x3) cov(e.x3*e.x4)
```

2.3 適合度の補足

- 次のコマンドでモデルを推定し, 適合度検定の情報を補足する.
- あくまで, 検定の意味を確認するための操作です. モデルの本質的な意味を考慮しての操作ではない.

```
. sem (Conservative->x1-x4), cov(e.x2*e.x3)
```

(推定結果は省略)

```
. estat gof,stats(all)
```

Fit statistic	Value	Description
Likelihood ratio		
chi2_ms(1)	38.830	model vs. saturated
p > chi2	0.000	
chi2_bs(6)	1461.871	baseline vs. saturated
p > chi2	0.000	
Population error		
RMSEA	0.145	Root mean squared error of approximation
90% CI, lower bound	0.108	
upper bound	0.186	
pclose	0.000	Probability RMSEA <= 0.05
Information criteria		
AIC	15152.573	Akaike´s information criterion
BIC	15224.008	Bayesian information criterion
Baseline comparison		
CFI	0.974	Comparative fit index
TLI	0.844	Tucker-Lewis index
Size of residuals		
SRMR	0.032	Standardized root mean squared residual
CD	0.835	Coefficient of determination

- RMSEA の項目について補足する.
- 先の例で, 一般的に 0.05 で良く, 0.08 でほどほどに良いフィットであることを述べた.
- したがって, RMSEA=0.145 という結果は好ましいものではない. その下にある 90% 信頼区間については次のように考える.
- lower bound:これが 0.05 よりも小ならば, 「フィットが良い」を棄却できない. 従ってこの例では棄却される.
- upper bound:0.1 よりも大ならば, 「フィットが悪い」が棄却できない. ここでは棄却できない.

- pclose は RMSEA が 0.05 以下になる確率. ここではゼロに近いので, フィットが悪いことと整合的である.

2.4　2 ファクターモデルのための準備

- サンプルデータである nlsy97cfa.dta には Conservative(保守性) に関する質問項目の他に, 鬱 (Depression) の心理状態に関する調査項目が含まれている.
- 最終的には観測できない保守性という因子と, 同じく観測できない鬱という因子の関係をモデル化する.
- 鬱症状の重い人ほど, 保守性が強くなる, というようなことが手元のデータから言えるか?

そのための第一歩として, 鬱に関連する質問項目ついて概観することから作業を始める.

```
. codebook x11-x13,compact
```

Variable	Obs	Unique	Mean	Min	Max	Label
x11	7295	4	3.223715	1	4	HOW OFT R FELT DOWN OR BLUE 2008
x12	7397	4	2.232932	1	4	HOW OFT R BEEN HAPPY PERSON 2008
x13	7291	4	3.655328	1	4	HOW OFT R DEPRESSED LAST MONTH 2008

x11　憂鬱な気持ちになる頻度は?
x12　幸せだと感じていた頻度は?
x13　先月は何回位、落ち込んだ気分になったか?

- 被験者の数は 7,291 から 7,397 人で, 保守性に関する調査よりも, かなり多い.

鬱症状に関するモデリング

- いきなり 2 ファクターモデルを推定するような事は避ける.
- まずは, 個別に SEM による単独のモデリングを行う.
- 今, 3 つの項目 (質問) がありますので, その分散共分散行列の要素は $3\,(3+1)\,/2 = 6$ 個.

$$
\begin{array}{lll}
\sigma_{x11} & & \\
\sigma_{x11\cdot x12} & \sigma_{x12} & \\
\sigma_{x11\cdot x13} & \sigma_{x12\cdot x13} & \sigma_{x13}
\end{array}
$$

- フィットするモデルは,

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= \alpha_{11} + D\beta_{11} + e.x_{11} \\
x_{12} &= \alpha_{12} + D\beta_{12} + e.x_{12} \\
x_{13} &= \alpha_{13} + D\beta_{13} + e.x_{13}
\end{aligned}
$$

- 3 つの質問からなるこのモデルのパラメータは 6 個 $(\beta_{12}, \beta_{13}, \mathrm{V}(e.x_{11}), \mathrm{V}(e.x_{12}), \mathrm{V}(e.x_{13}), \mathrm{V}(D))$
- 分散共分散行列の要素と, 推定するパラメータの個数が等しいとき, これを丁度識別と呼ぶ.
- 丁度識別の場合, 尤度比検定の自由度は 0 になり, 構築したモデルが saturated モデルとまったく同じ情報を持っているので, 仮説検定は実行できない.
- 質問が 2 つしかないと, 推定自体が実行できない.
- 3 つの質問項目からなるモデルを推定する. 丁度識別の場合, 推定後に行う `estat gof` や `estat mindices` などの検定を行っても意味はない.

```
. sem (Depress -> x11-x13)
(推定結果は省略)
. sem,standardized
```

```
Structural equation model                       Number of obs     =      7,183
Estimation method  = ml
Log likelihood     = -18464.972
 ( 1)  [x11]Depress = 1
```

Standardized	Coef.	OIM Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
Measurement						
x11 <-						
Depress	.8130901	.0101864	79.82	0.000	.7931251	.8330551
_cons	4.851163	.0421589	115.07	0.000	4.768533	4.933793
x12 <-						
Depress	-.6088417	.0102152	-59.60	0.000	-.6288631	-.5888203
_cons	3.435663	.0309978	110.84	0.000	3.374909	3.496418
x13 <-						
Depress	.654818	.010117	64.72	0.000	.6349891	.6746469
_cons	6.159645	.0527282	116.82	0.000	6.0563	6.26299
var(e.x11)	.3388845	.0165649			.3079245	.3729572
var(e.x12)	.6293117	.0124389			.6053982	.6541699
var(e.x13)	.5712134	.0132496			.5458261	.5977814
var(Depress)	1	.			.	.

```
LR test of model vs. saturated: chi2(0)   =      0.00, Prob > chi2 =      .
```

- x12 は変数の値が大きいほど, 鬱とは反対の状態を示すので, 符号は逆転する.
- 推定結果の解釈を簡単に行いたい, という意図がある時はリバースコーディングする. モデル推定上は特に問題にはならない.
- 潜在変数 Depress の信頼性は $\rho = 0.74$ です. 信頼性を計算する場合は, 次のコマンドで潜在変数の分散を 1 に固定してモデルを再推定します.

```
. sem (Depress -> x11-x13),var(Depress@1)
```

2.5　推定手法と欠損値

- 最終的に推定する 2 ファクターモデルでは, 保守性と鬱の質問のうち, 片方の質問にすべて答えていないような標本は除いてモデル推定を行う.
- そこで, 推定手法の特徴と, 具体的なコマンドについてここで考察しておく.

Option1. sem (Depress -> x11-x13)

- これはデフォルトのコマンド. この場合, Depress の項目について欠損値があるとリストワイズな削除を行う.
- その結果, モデル推定には 7,183 人分のデータ (3 問に回答) を利用する.
- Conservative への回答状況は考慮しない.

Option 2. sem (Depress -> x11-x13),method(mlmv) allmiss

- 少なくとも 1 つの質問には答えている 7,429 人分のデータを利用する.
- Conservative への回答状況は考慮しない.
- `allmiss` オプションは全ての種類の欠損値に対応する.

Option 3. sem (Depress -> x11-x13) if !missing(x1, x2, x3,x4,x5, x6, x7, x8, x9)

- Option1 と同様, Depress の項目について欠損値があるとリストワイズな削除を行う.
- Conservative についても同様にリストワイズ削除を行う.
- 標本数は 1,460 人.

Option 4. sem (Depress -> x11-x13) if x1 !=. | x2 !=. |x3 !=. |x4 !=. |x5 !=. |

x6 !=. |x7 !=. |x8 !=. |x9 !=.,method(mlmv) allmiss

- Depress のうちの少なくとも一つ, 同じく, Conservative の少なくとも一つに回答した 1,752 人を利用.

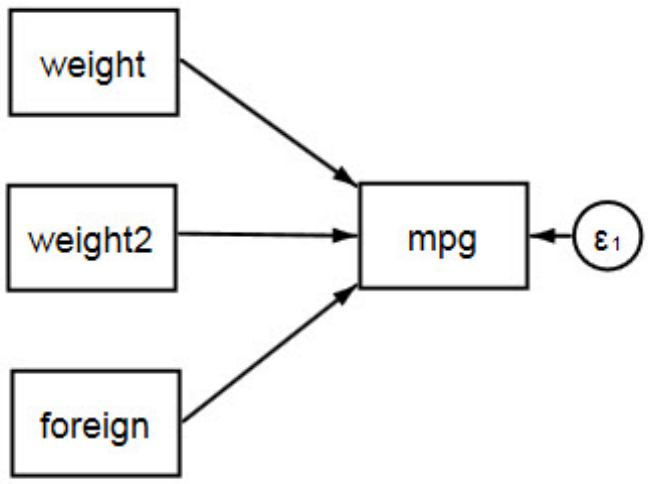
2.6 練習問題 1

- 次に示すコマンドで重回帰モデルを推定せよ.

```
.sysuse auto,clear

.reg mpg weight c.weight#c.weight foreign

.regress,beta
```

```
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        74
-------------+----------------------------------   F(3, 70)        =     52.25
       Model |  1689.15372         3  563.05124   Prob > F        =    0.0000
    Residual |   754.30574        70  10.7757963   R-squared       =    0.6913
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6781
       Total |  2443.45946        73  33.4720474   Root MSE        =    3.2827

------------------------------------------------------------------------------
         mpg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|                     Beta
-------------+----------------------------------------------------------------
      weight |  -.0165729   .0039692    -4.18   0.000                -2.226321
             |
c.weight#c.weight |   1.59e-06   6.25e-07     2.55   0.013                 1.32654
             |
     foreign |    -2.2035   1.059246    -2.08   0.041                 -.17527
       _cons |   56.53884   6.197383     9.12   0.000                       .
------------------------------------------------------------------------------
```

- この推定結果は次のモデルに対応する



- SEM ビルダーを使って regress コマンドと同じ結果を求めよ.
- ただし, c.weight#c.weight は次に示すように, 新たな変数 weight2 として作成すること.

```
. sem (weight2 -> mpg, ) (weight -> mpg, ) (foreign -> mpg, ), standardized nocapslatent

Endogenous variables
Observed:  mpg
Exogenous variables
Observed:  weight2 weight foreign
Fitting target model:
Iteration 0:   log likelihood = -1909.8206
Iteration 1:   log likelihood = -1909.8206
Structural equation model                       Number of obs     =         74
Estimation method  = ml
Log likelihood     = -1909.8206

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OIM
Standardized |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
Structural   |
  mpg        |
     weight2 |    1.32654    .498261     2.66   0.008     .3499662    2.303113
      weight |  -2.226321   .4950378    -4.50   0.000    -3.196577   -1.256064
     foreign |    -.17527   .0810378    -2.16   0.031    -.3341011   -.0164389
       _cons |   9.839209   .9686872    10.16   0.000     7.940617     11.7378
-------------+----------------------------------------------------------------
   var(e.mpg)|    .308704   .0482719                      .2272168    .4194152
------------------------------------------------------------------------------
Note: The LR test of model vs. saturated is not reported because the fitted
      model is not full rank.
```

研究者向けの統計解析ソフトウェア **Stata® 評価版のお申込み**

機能制限なし！30日間無料で使える評価版でまずはお試しください！

https://www.lightstone.co.jp/stata/evaluate.html

※学生の方への評価版の提供はございません。大学の講義で使用するなど単位取得に関わる形でのご利用となる場合は学生版のご購入をご検討ください。

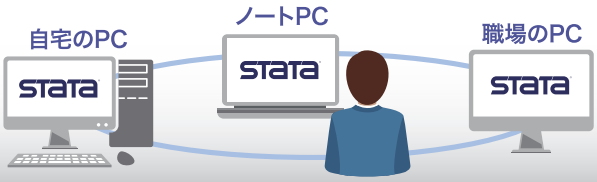
ライセンスはサブスクリプションがおすすめ！

サブスクリプションライセンスを選ぶメリット

- 常にStataの最新バージョンが利用できます
- 技術サポートの対象となります
- 毎年の経費としてStataを導入できます
- 利用者の増減に柔軟に対応可能
- 初期導入費を抑えたい場合にもおすすめ

シングルライセンス（サブスクリプション）

職場のPC・ノートPC・自宅のPC等、個人所有のPCにインストール可能です。
同時に使用できるのは1台のみとなります。



マルチユーザライセンス（サブスクリプション）　2ユーザ以上

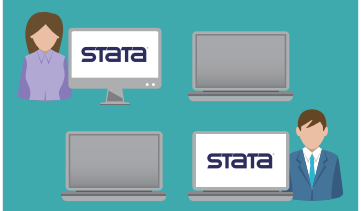
ボリュームライセンス

シングルライセンスを複数人でまとめてご購入いただく際のボリュームディスカウント商品です。

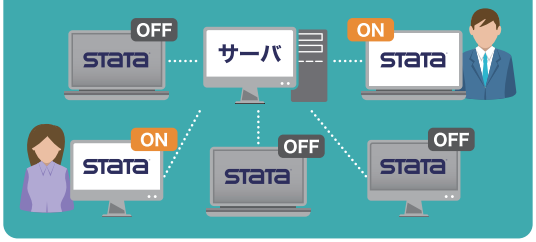
同時起動ライセンス

ご利用環境により下記3通りの運用方法からご選択いただけます。

PC毎にスタンドアロンインストールをして運用
例:2ライセンスの場合



クライアント＆サーバ環境によるネットワーク運用
例:2ライセンスの場合



1台の仮想マシンにユーザがアクセスする運用
例:2ライセンスの場合

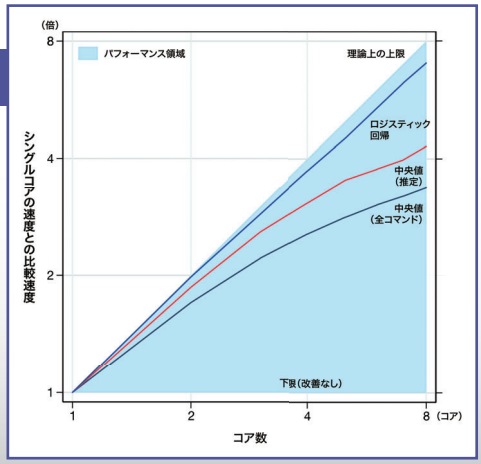
＼データ処理時間の削減ならMP／

Stata／MPの演算能力

Stata MPはPCの持つマルチコアの特性を活かして、処理を分散・並列する機能を備えます。およそ85%以上のコマンドで処理速度が向上し、コア数に応じた計算時間の短縮が期待できます。コマンドごとの処理速度の向上の度合いについては以下のページや資料をご覧ください。

コア数	全てのコマンド	推定コマンド	ロジスティック回帰
2	1.7倍	1.8倍	1.9倍
4	2.6倍	3.1倍	3.8倍
8	3.3倍	4.2倍	6.8倍

弊社Webページ内の『Stata／MP』
https://www.lightstone.co.jp/stata/statamp.html



株式会社 ライトストーン
〒101−0031
東京都千代田区東神田 2−5−12　龍角散ビル 7F
TEL：03−3864−5211　e-mail：sales@lightstone.co.jp
FAX：03−3865−0050　WEB：https://www.lightstone.co.jp/